Algebra Llinol - Cyflwyniad

Morris, Alun

Algebra Llinol - Cyflwyniad

Alun O Morris
Prifysgol Aberystwyth

October 20, 2008

RHAGAIR

Cyfieithiad yw'r llyfr hwn o *Linear Algebra - An Introduction* a ymddangosodd gyntaf yn 1978 ac a gyhoeddwyd gan y cwmni Van Nostrand Reinhold. Cafwyd Ail Argraffiad yn 1982 a dros y blynyddoedd bu nifer o ail brintiadau. Yn y cyfamser cyfieithwyd y llyfr i'r Groeg a Thwrceg. Er i'r llyfr gael ei ddefnyddio dros y blynyddoedd gan nifer o fyfyrwyr yn Aberystwyth a oedd yn cyflwyno eu gwaith yn Gymraeg, nid oedd ar gael yn y Gymraeg. Dyma, o'r diwedd, ymgais i wneud rhyw fath o iawn am hynny. Er bod y llyfr wedi bod allan o brint yn y Saesneg ers rhai blynyddoedd yn awr, mae'n amlwg ei fod yn dal i gael ei gymeradwyo mewn nifer o brifysgolion. Felly, y gobaith yw y bydd o ddefnydd. Efallai mai'r peth nesaf bydd ei gyfiethu'n ôl i'r Saesneg!

Mae nifer o newidiadau yn y fersiwn hwn. Mae'n siwr bod nifer o gamgymeriadau ac efallai gwelliannau posibl i'r cyfieithu - byddwn yn ddiolchgar dderbyn unrhyw awgrymiadau. Gellir eu cyflwyno hefyd drwy Dr Gwion Evans o'r Adran Fathemateg, Prifysgol Aberystwyth.

Alun O Morris
20fed Hydref 2008

Chapter 1

Hafaliadau Llinol a Matricsiau

1.1 Cyflwyniad

Mae'n debyg fod y darllenydd yn gyfarwydd â dulliau i ddatrys systemau o hafaliadau llinol os yw'r nifer o hafaliadau a newidynnau yn fach. Daw'r cymhwysiadau o algebra llinol i ganghennau eraill o wyddoniaeth, peirianneg, economeg a chyfeiriadau eraill trwy'r angen i ddatrys systemau o hafaliadau llinol o'r fath yma. Gellir dweud fod yr astudiaeth o algebra llinol wedi ei ddatblygu fel y gall canlyniadau damcaniaethol gael eu datblygu i'r systemau hyn a thrwy hynny y gallent yn eu tro gael eu trafod a'u datrys yn y dull mwyaf effeithiol posibl.

Ar y lefel elfennol, y dull a ddefnyddir amlaf i ddatrys system o hafaliadau llinol yw'r un sy'n ymwneud a determinantau neu sy'n defnyddio proses o ddileadau. Yn y bennod hon, y bwriad yw datblygu'r ail ddull hwn i drin yr achos mwyaf cyffredinol. Gwelir mai hwn yw y dull mwyaf effeithiol o drin systemau o'r fath.

I gymelliadu y gwaith a ddatblygir yng nghweddill y bennod darlunir yn gyntaf y gwaith drwy ystyried enghreifftiau perthnasol.

ENGHRAIFFT Dangosir sut i ddarganfod pob datrysiad o'r systemau o hafaliadau llinol canlynol:

(i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

(i) Yn gyntaf, tynnir dwy waith yr hafaliad cyntaf o'r ail a phedair gwaith yr hafaliad cyntaf o'r trydydd hafaliad yn eu tro, gan roi'r system o hafaliadau

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 9x_2 & - & 5x_3 & = & -3 \end{array}$$

Yn awr rhennir yr ail hafaliad â thri ac adio dwywaith yr hafaliad â ffurfiwyd i'r hafaliad cyntaf a thynnu naw gwaith yr hafaliad â ffurfiwyd yn awr o'r drydedd hafaliad, i roi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & - & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

sy'n arwain i'r datrysiad

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{2}.$$

Mae hwn yn ddatrysiad unigryw i'r system wreiddiol o hafaliadau. Beth a wnaethpwyd oedd disodli mewn ffordd systematic y system wreiddiol o hafaliadau gyda system o hafaliadau sy'n "gywerth" â'r gwreiddiol ac sy'n hawddach i'w datrys.

(ii) Mae'r ddau hafaliad yma yn anghyson, gan y byddai tynnu dwy waith yr hafaliad cyntaf o'r ail hafaliad yn arwain i'r canlyniad ffals $1 = 0$, felly nid oes datrysiad yn bodoli yn yr achos yma.

(iii) Yn yr achos yma, gellir gostwng y system o hafaliadau i'r system o hafaliadau

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & \frac{1}{3}x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \end{array}$$

neu, mewn geiriau eraill

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 & = & & & \frac{1}{3}x_3. \end{array}$$

Os yn awr, rhoddir $x_3 = t$, yna gwelir pa bynnag werth a roddir i t ceir datrysiad o'r system wreiddiol o hafaliadau, sef $x_1 = 1 - \frac{1}{3}t$, $x_2 = \frac{1}{3}t$, $x_3 = t$. Er engraifft, os yw $t = 0$, yna mae $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ yn ddatrysiad ac os yw $t = 3$, yna mae $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ yn ddatrysiad arall. Felly, yn yr achos yma, nid yn unig mae datrysiad yn bodoli, ond mae mwy nag un datrysiad i'r system, yn wir, rhif anfeidraidd o ddatrysiadau.

O'r engreifftiau uchod felly, gwelir y gall system gael (i) dim datrysiad, (ii) datrysiad unigryw, neu (iii) mwy nag un datrysiad. Hefyd, sylwer mai'r dull o ddatrysiad a ddefnyddiwyd oedd y dull o ddileu yn systematic i arwain at system o hafaliadau "gywerth symlach" y gellir eu datrys yn hawddach.

Yn gyntaf, canolbwyntir ar ddatblygu technegau i ddatrys hafaliadau llinol, yna ymhellach ymlaen ystyrir y ddau gwestiwn

(i) Pryd y mae datrysiadau yn bodoli?

(ii) Pryd y mae datrysiad yn ddatrysiad unigryw?

1.2 Gweithrediadau Rhes Elfennol ar Fatricsiau

Gadawer i K fod yn faes.

Diffiniad 1.1 ***Gelwir arae petryalog o elfennau o*** K

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

yn **fatrics*****.*** ***Am*** $i = 1, 2, \dots, m$***, gadawer i***

$$r_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \end{pmatrix}$$

ac am $j = 1, 2, \dots, n$ ***gadawer i***

$$c_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

yna gelwir r_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ ***yn*** **rhesi** ***y matrics a gelwir*** c_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ ***yn*** **golofnau** ***y matrics. Gelwir matrics gyda*** m ***rhes a*** n ***colofn yn*** **fatrics** $m \times n$***. Gelwir yr elfen o*** K ***sy'n sefyll lle mae'r*** i***-fed rhes a'r*** j***-fed golofn yn croesdori yr*** (i, j)**-fed elfen** ***o'r matrics. Ysgrifennir y matrics mewn ffurf byr fel***

$$A = (\alpha_{ij})_{m \times n} \quad \textbf{\textit{neu}} \quad A = (\alpha_{ij}).$$

ENGHRAIFFT
Mae

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yn fatrics 3×4 **gyda, er enghraifft,** $(2, 1, 3, 1)$ **yn rhes a** $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **yn golofn o'r matrics.**

Diffiniad 1.2 ***Gelwir y canlynol yn*** **weithrediadau rhes elfennol** ***ar y matrics*** $A = (\alpha_{ij})$***,***

(i) os yw $1 \le i \le m$***,*** $\alpha \in K$***,*** $\alpha \ne 0$***, lluosi yr*** i***-fed rhes o*** A ***gan*** α***,***

(ii) os yw $1 \le i, j \le m$***,*** $i \ne j$***,*** $\alpha \in K$***, adio*** α ***gwaith yr*** j***-fed rhes i'r*** i***-fed rhes,***

(iii) ymgyfnewid yr i***-fed a'r*** j***-fed rhes.***

Os r_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ **yw** m **rhes y matrics** A**, yna ysgrifennir y tair weithred rhes yma fel a ganlyn**

$$(i)\ \ r_i \to \alpha r_i, \quad (ii)\ \ r_i \to r_i + \alpha r_j, \quad (iii)\ r_i \leftrightarrow r_j.$$

Diffiniad 1.3 ***Os yw A a B yn ddau fatrics $m \times n$, yna mae B yn*** **res gywerth** ***i A os gellir sicrhau B o A trwy ddilyniant meidraidd o weithrediadau rhes elfennol.***

ENGHRAIFFT
Mae

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

yn rhes gywerth i

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gan fod

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ond fel fynegwyd ynghynt, y bwriad yw trawsnewid matrics gyda matrics sy'n rhes gywerth sydd mewn ffurf "syml gywerth". Yn awr diffinir beth a olygir gan fatrics o'r fath.

Diffiniad 1.4 ***Gelwir matrics $m \times n$ A yn*** **fatrics echelon** ***os yw***

(i) yr elfen gyntaf ansero ymhob rhes ansero yw 1,

(ii) lleolir yr 1 cyntaf mewn rhes ansero i'r dde o'r 1 cyntaf mewn unrhyw res sy'n ei rhagflaenu,

(iii) rhestrir y rhesi ansero o flaen y rhesi sero.

Gelwir matrics echelon yn **fatrics echelon gostyngol** ***os yn ychwanegol***

(iv) mai'r 1 cyntaf mewn unrhyw res ansero yw'r unig elfen ansero yn y golofn y lleolir yr 1 hwnnw.

ENGHRAIFFT
Mae

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yn fatrics echelon, ond nid yn fatrics echelon gostyngol; mae

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yn fatrics echelon gostyngol, ond nid yw

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{na} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hyd yn oed yn fatricsau echelon.

Yn awr, gellir profi

Theorem 1.5 *Mae pob matrics $m \times n$ yn rhes gywerth i fatrics $m \times n$ res echelon gostyngol.*

PRAWF (Dull Dileadau Gauss) Cymerer mai'r j-fed golofn o fatrics $m \times n$ A, gyda $1 \leq j \leq m$, yw'r golofn gyntaf o A gydag elfen ansero a bod yr elfen honno yn yr i-fed res. Cymerer fod $\alpha_{ij} \neq 0$, gyda $1 \leq i \leq n$, yna canlyniad y weithred res elfennol $r_i \to \frac{1}{\alpha_{ij}} r_i$, yn cael ei dilyn gan y weithred res elfennol $r_1 \leftrightarrow r_i$ yw matrics gyda 1 yn y safle-$(1, j)$, fel â ganlyn

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{1,j+1} & \dots & \beta_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{2,j} & \beta_{2,j+1} & \dots & \beta_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{m,j} & \beta_{m,j+1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Yn awr, mae'r gweithrediadau rhes elfennol $r_k \to r_k - \beta_{kj} r_1$ $(k = 2, 3, \dots, m)$ yn arwain i'r matrics

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{1,j+1} & \dots & \gamma_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{2,j+1} & \dots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{m,j+1} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Os erbyn hyn mae rhes o seroau wedi dod i'r golwg, gellir ymgyfnewid rhesi fel bo'r rhesi ansero yn ymddangos y flaen y rhesi sero. Yn awr, gellir ailadrodd y broses uchod gyda'r $m - 1$ rhes olaf o'r matrics yma gan ffurfio matrics o'r ffurf (gall y rhesi olaf fod yn rhesi sero erbyn hyn)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \delta_{1,j+1} & \dots & \delta_{1,k-1} & \delta_{1,k} & \delta_{1,k+1} & \dots & \delta_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \delta_{2,k+1} & \dots & \delta_{2,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{3,k} & \delta_{3,k+1} & \dots & \delta_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{m,k} & \delta_{m,k+1} & \dots & \delta_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Gan barhau yn awr yn yr un modd, ar ôl dim mwy nag m o symudiadau o'r fath (pe bae rhes sero wedi dod i'r golwg yn y broses, byddai llai nag m symudiad) bydd matrics echelon yn dilyn. Yn awr, gellir sicrhau matrics

o ffurf matrics echelon gostyngol trwy weithredu nifer o weithrediadau rhes elfennol ar y matrics uchod, megis $r_i \to r_i - \delta_{ik} r_2$ $(i = 1, 3, 4, \ldots, m)$ gan roi y matrics

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \epsilon_{1,j+1} & \ldots & \epsilon_{1,k-1} & 0 & \epsilon_{1,k+1} & \ldots & \epsilon_{1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \epsilon_{2,k+1} & \ldots & \epsilon_{2,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{3,k+1} & \ldots & \epsilon_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{m,k+1} & \ldots & \epsilon_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Gan weithredu ar bob rhes sy'n dechrau ag 1 yn eu tro, gorffenir gyda matrics echelon elfennol. Mae hyn yn cwblhau prawf y theorem.

Ond efallai y daw y prawf uchod yn fwy dealladwy o ddilyn enghraifft.

ENGHRAIFFT
Gadawer i

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, mae'r gweithrediadau rhes elfennol $r_2 \to \frac{1}{2}r_2, r_1 \leftrightarrow r_2$ **and** $r_4 \leftrightarrow r_5$**, yn eu tro, yn rhoi'r matrics**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mae'r gweithrediadau rhes elfennol $r_3 \to r_3 - 3r_1$**,** $r_4 \to r_4 - 5r_1$ **yn rhoi'r matrics**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, trwy'r gweithrediadau rhes elfennol a ganlyn yn y drefn yma $r_2 \leftrightarrow r_3$**,** $r_1 \to r_1 - r_2$**,** $r_4 \to r_4 - r_2$**,** $r_3 \to r_3 - 10r_1$**,** $r_2 \to 2r_2$**, ceir y matrics**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ac yn derfynol, mae $r_1 \to r_1 - 3r_3$ **a** $r_2 \to r_2 + 5r_3$ **yn arwain i'r matrics echelon gostyngol**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noder eto pa mor bwysig yw bod y gweithredoedd yn cael eu gweithredu yn y drefn a nodwyd.

Ymarferion 1.2

1. Darganfyddwch fatricsau echelon gostyngol y matricsau canlynol

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ **(v)** $\begin{pmatrix} i & 1-i & i & 0 \\ 1 & -2 & 0 & i \\ 1-i & -1+i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 & 1+\sqrt{2} & -1-2\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2}-2 & -2+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. A yw'r parau canlynol o fatricsau yn rhes gymharebol?

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 Cymhwysiad i Hafaliadau Llinol

Ystyrir y system o m hafaliadau llinol yn yr n newidyn $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \ (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.3.1}$$

lle mae α_{ij}, $\beta_i \in K$, yna gelwir

$$A = (\alpha_{ij})_{m\times n} \qquad \mathbf{a} \qquad (A|b) = (\alpha_{ij}|\beta_i)_{m\times(n+1)}$$

yn fatrics cyfernodau a matrics estynedig o'r system yn ôl eu trefn, hynny yw,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right).$$

Diffiniad 1.6 ***Gelwir** n**-twpl** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **sy'n bodloni bob un o'r** m **hafaliad yn y system o hafaliadau llinol uchod yn*** **ddatrysiad** ***o'r system. Dywedir fod dwy system o hafaliadau llinol yn*** **gywerth** ***os yw bob datrysiad o un system yn ddatrysiad o'r llall a vice versa. Gelwir system o hafaliadau llinol yn*** **system homogenaidd** ***os yw*** $\beta_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, m)$. ***Gelwir system gyda o leiaf un datrysiad yn*** **system gyson**. ***Gelwir y datrysiad*** $(0, 0, \ldots, 0)$ ***o system homogenaidd yn*** **ddatrysiad distadl**.

Y prif ganlyniad yw:

Theorem 1.7 ***Os yw*** $(A'|b') = (\alpha'_{ij}|\beta'_i)$ ***yn fatrics*** $m \times (n+1)$ ***sy'n deillio o'r matrics*** $m \times (n+1)$ $(A|b)$ ***trwy weithredoedd rhes elfennol, yna mae'r systemau***

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \ (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \textbf{\textit{a}} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha'_{ij} x_j = \beta'_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

yn gywerth.

PRAWF Nodir yn gyntaf, os yw'r matrics $(A'|b')$ **yn deillio o fatrics** $(A|b)$ **trwy weithred rhes elfennol, yna bodola gweithred rhes elfennol ar** $(A'|b')$ **sy'n arwain i'r matrics** $(A|b)$**, hon fydd y gwrthdro o'r weithred rhes elfennol. Y gwrthdroeon o'r tair gweithred rhes elfennol**

$$(i) \ \ r_i \to \alpha r_i, \ \alpha \neq 0 \ \ (ii) \ \ r_i \to r_i + \alpha r_j, \ \ (iii) \ r_i \leftrightarrow r_j$$

yw

$$(i)' \ \ r_i \to \alpha^{-1} r_i, \ \ (ii)' \ \ r_i \to r_i - \alpha r_j, \ \ (iii)' \ r_i \leftrightarrow r_j$$

yn ôl eu trefn. Hefyd, pa bynnag weithred rhes elfennol a ddefnyddiwyd i roi'r matrics $(A'|b')$ **o'r matrics** $(A|b)$**, bydd yr hafaliadau yn y system o hafaliadau llinol sy'n cyfateb yn gyfuniadau llinol o'r hafaliadau yn y system wreiddiol. Felly, bydd datrysiad o'r system wreiddiol hefyd yn ddatrysiad o'r system newydd. Er engraifft, am weithred rhes elfennol o'r fath (ii), yr unig hafaliad a newidir yw'r** i**-fed hafaliad, lle mae'r hafaliad**

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n = \beta_i$$

yn cael ei disodli gan

$$(\alpha_{i1} + \alpha\alpha_{j1}) x_1 + (\alpha_{i2} + \alpha\alpha_{j2}) x_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha\alpha_{jn}) x_n = \beta_i + \alpha\beta_j.$$

Felly, os yw $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **yn ddatrysiad o'r system wreiddiol, mae hefyd yn ddatrysiad o'r system newydd. I'r gwrthwyneb, gellir defnyddio yr union ddadl i brofi fod pob datrysiad o'r system newydd hefyd yn ddatrysiad o'r system wreiddiol. Felly, trwy ddefnyddio yr un ddadl gyda pob weithred rhes elfennol a ddefnyddir i fynd o'r matrics** $(A|b)$ **i'r matrics** $(A'|b')$**, fe geir canlyniad y theorem.**

Cyn ystyried engreifftiau, nodir pedwar canlyniad pwysig i'r theorem yma yn y pedwar canlyneb sy'n dilyn.

Canlyneb 1.8 ***Os $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ yw'r system o hafaliadau llinol sy'n perthyn i'r matrics estynedig $(A|b) = (\alpha_{ij}|\beta_i)$ ac $(R|s) = (\rho_{ij}|\sigma_i)$ yw'r matrics echelon gostyngol cyfatebol, yna mae'r system o hafaliadau llinol***

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_j = \sigma_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

yn gywerth â'r system wreiddiol

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

PRAWF O Theorem 1.5 gwelir bod y matrics $(R|b)$ yn deillio o'r matrics $(A|b)$ trwy rif meidraidd o weithrediadau rhes elfennol. Felly, mae'r canlyniad yn dilyn yn union o'r theorem uchod.

Cyn symud ymlaen, mae'n werth edrych yn fwy manwl ar y canlyniad yma. Os yw'r 1'au cyntaf yn y matrics echelon gostyngol $(R|s)$ yn ymddangos yng ngholofnau $j_1, j_2, \ldots, j_l$, a bod yr elfennau eraill yng ngholofnau $k_1, k_2, \ldots, k_p$, yna yr hafaliadau llinol cyfatebol yw

$$\begin{aligned} x_{j_1} + \sum_{k=k_1}^{k_p} \rho_{1k} x_{j_k} &= \sigma_1 \\ x_{j_2} + \sum_{k=k_1}^{k_p} \rho_{12k} x_{j_k} &= \sigma_2 \\ &\vdots \\ x_{j_l} + \sum_{k=k_1}^{k_p} \rho_{lk} x_{j_k} &= \sigma_l \\ 0 &= \sigma_{l+1}, \end{aligned}$$

lle mae $l + 1 \leq m$. Yna, yntau mae

(i) $\sigma_{l+1} = 1$ sy'n golygu fod $0 = 1$ ac felly nid yw'r system yn gyson (ac felly nid oes datrysiad)

neu mae

(ii) $\sigma_{l+1} = 0$ ac mae'r system yn gyson, hynny yw, mae gan y system ddatrysiad a gellir darganfod y datrysiad esblyg trwy roi gwerthoedd mympwyol i'r newidynnau $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$.

Felly, gwelir, nid yn unig mae'r dull yn dangos a yw datrysiad i'r system yn bodoli, ond hefyd, os oes datrysiad, mae'n rhoi dull ymarferol i benderfynu'r datrysiad. O ganlyniad i'r ddadl uchod felly gallir yn awr ddatgan fel â ganlyn.

Canlyneb 1.9 ***Mae system o hafaliadau llinol yn gyson os a dim ond os nad yw colofn olaf fatrics echelon gostyngol matrics estynedig y system yn cynnwys elfen flaenol.***

Canlyneb 1.10 ***Os yw $m < n$, yna mae gan system homogenaidd o m hafaliad llinol o leiaf un datrysiad annistadl. Os yw $l = n$, yna y datrysiad distadl yw'r datrysiad unigryw.***

Hynny yw, wrth ystyried system homogenaidd, os yw'r nifer o hafaliadau yn llai na'r nifer o newidynnau, yna mae o leiaf un datrysiad yn bodoli; yn wir, rhif anfeidraidd o ddatrysiadau. Hefyd, os yw'r nifer o resi ansero yn y matrics echelon gostyngol yn hafal a'r nifer o newidynnau, yna y datrysiad distadl $(0, 0, \ldots, 0)$ yw'r unig ddatrysiad.

Canlyneb 1.11 ***Mae gan system o n o hafaliadau llinol homogenaidd mewn n newidyn ddatrysiad annistadl os a dim ond os yw ei fatrics echelon gostyngol $R \neq I_n$, lle mae I_n yw'r matrics $n \times n$ gyda 1 yn y safle-(i, i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a sero ymhob safle arall***
(Y matrics unfathiant - a ddiffinir yn yr adran nesaf)

PRAWF Os yw $R = I_n$, yna mae'r system yn gostwng i $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, hynny yw, ceir y datrysiad distadl.

Os yw $R \neq I_n$, yna mae gan R res a cholofn o seroau, hynny yw, mae $l < n$ a thrwy Ganlyneb 1.10, mae gan y system ddatrysiad annistadl.

ENGHREIFFTIAU.

1. **Dangosir sut i ddarganfod datrysiad cyffredinol y system ganlynol o hafaliadau llinol**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 5x_2 & + & 35x_3 & - & 24x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}.$$

   Matrics estyniedig y system hon yw

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ac fel y gwelwyd yn yr enghreifftiau blaenorol, y matrics echelon gostyngol perthnasol yw

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felly, mae'r system wreiddiol o hafaliadau llinol yn gywerth â'r system

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & - & 4x_3 & & = & 26 \\ & x_2 & + & 7x_3 & & = & -43 \\ & & & & x_4 & = & -9 \end{array}$$

neu

$$x_1 = 4x_3 + 26, \quad x_2 = -7x_3 - 43, \quad x_4 = -9.$$

Os rhoddir $x_3 = \lambda$, yna y datrysiad cyffredinol yw

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4\lambda + 26, -7\lambda - 43, \lambda, -9),$$

lle y gellir rhoi unrhyw werthoedd i λ.

2. Dangosir sut i ddarganfod datrysiad cyffredinol y system ganlynol o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Matrics cyfernodau y system hon yw

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trwy weithredu y dilyniant canlynol o weithredoedd rhes elfennol, ceir y matrics echelon gostyngol:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_3 \to r_3 - r_1}{\overset{r_2 \to r_2 - r_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_2 \to \frac{1}{2} r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3 \to r_3 - 3r_2}{\overset{r_1 \to r_1 + r_2}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \overset{r_3 \to -\frac{2}{7} r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_2 \to r_2 - \frac{1}{2} r_3}{\overset{r_1 \to r_1 - \frac{3}{2} r_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Golyga hyn, o achos Canlyneb 1.11, mai'r datrysiad distadl $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ yw'r datrysiad unigryw o'r system.

3. Darganfyddir yn gyntaf am ba werth o k mae'r system

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & k \end{array}.$$

yn gyson?

Gwelir fod

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & k \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & k \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 13 & k+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{7} r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 13r_2]{r_1 \to r_1 + 3r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-10 \end{array}\right).$$

Felly, trwy Ganlyneb 1.9, mae'r system o hafaliadau linol yn gyson os a dim ond os yw $k - 10 = 0$, hynny yw, $k = 10$.

Pan mae $k = 10$, yna y matrics echelon gostyngol yw

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ac felly, y datrysiad unigryw yw $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Ymarferion 1.3

1. Datryswch y systemau homogenaidd o hafaliadau llinol gyda'r matrics o gyfernodau canlynol

$$\textbf{(i)}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(ii)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(iii)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(iv)}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -5 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 11 & -12 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Datryswch y systemau an-homogenaidd o hafaliadau llinol gyda'r matricsau estynedig canlynol

$$\textbf{(i)}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \textbf{(ii)}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\textbf{(iii)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{(iv)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

3. Darganfyddwch yr amodau sy'n rhaid i λ a μ eu bodlonni fel bod gan y systemau o hafaliadau llinol sy'n dilyn (i) datrysiad unigryw (ii) dim datrysiad (iii) rhif anfeidraidd o ddatrysiadau.

$$\textbf{(i)}\ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & \lambda z & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 6z & = & \mu \end{array} \qquad \textbf{(ii)}\ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

4. Am pa werthoedd o λ mae gan y system o hafaliadau

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ \lambda x & + & 2y & + & z & = & b \\ \lambda^2 x & + & 4y & + & z & = & c \end{array}$$

ddatrysiad unigryw? Yn yr achosion eraill, darganfyddwch yr amodau mae'n rhaid i a, b, c eu bodlonni fel y gall datrysiad fodoli a darganfyddwch y datrysiad cyffredinol.

5. Darganfyddwch werthoedd λ fel bod y systemau o hafaliadau llinol canlynol yn gyson ac am y gwerthoedd yma o λ darganfyddwch y datrysiadau cyffredinol.

(i) $\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 7 \\ 4x & - & 5y & + & \lambda z & = & \lambda - 5 \end{array}$ **(ii)** $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & \lambda z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & \lambda \\ \lambda x & + & y & + & \lambda^2 z & = & 3 \end{array}$

(iii) $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5y & + & 3 & = & 0 \\ 5x & + & y & - & \lambda & = & 0 \\ x & + & 2y & + & \lambda & = & 0 \end{array}$ **(iv)** $\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & + & t & = & a \\ 6x & + & 10y & + & 4z & + & t & = & (\lambda+1)^2 \end{array}$

6. Darganfyddwch y datrysiad cyflawn o'r system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} & & & y & + & z & + & u & + & 2v & = & 2 \\ - & x & + & 4y & + & 3z & + & 3u & + & 4v & = & 7 \\ & 2x & + & y & + & 3z & + & 2u & + & 8v & = & 3 \\ & 3x & + & y & + & 4z & - & u & + & 4v & = & 0 \\ & 5x & + & 2y & + & 7z & & & + & 10v & = & 2 \end{array}$$

7. Datryswch yn gyflawn y system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & & & x_{n-3} & + & x_{n-2} & + & x_{n-1} & & = & 0 \\ & & & & & & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + \; x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & x_{n-1} & + \; x_n & = & 0 \end{array}$$

pan mae (i) $n = 8$ **(ii)** $n = 9$**.**

1.4 Algebra Matricsau

Yn gyntaf, cyflwynir nifer o ddiffiniadau sylfaenol, ond yn fwyaf arbennig, dangosir sut i adio a lluosi matricsau.

Diffiniad 1.12 Hafaledd Matricsau ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij})$ ***yn fatrics*** $m \times n$ ***a*** $B = (\beta_{ij})$ ***yn fatrics*** $p \times q$***, yna mae*** $A = B$ ***os a dim ond os yw*** $m = p, n = q$ ***ac*** $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$***.***

Y Matrics Sero ***Gelwir y matrics*** $m \times n$ $0 = (\alpha_{ij})$ ***gyda*** $\alpha_{ij} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ ***yn*** **fatrics sero.**

Adio Matricsau ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij})$ ***yn fatrics*** $m \times n$ ***a*** $B = (\beta_{ij})$ ***yn fatrics*** $p \times q$***, yna diffinnir*** $A + B$ ***os a dim ond os yw*** $m = p, n = q$ ***ac yna***

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

yw'r matrics $m \times n$ ***a geir wrth adio yr elfennau cyfatebol yn*** A ***a*** B***.***

Lluosi Sgalar ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij})$ ***yn fatrics*** $m \times n$ ***ac*** $\alpha \in K$***, yna***

$$\alpha A = (\alpha\alpha_{ij})$$

yw'r matrics $m \times n$ ***a geir trwy luosi pob elfen o*** A ***gan*** α***; gelwir*** αA ***y*** **lluosydd sgalar** ***o*** A ***gan*** α***.***

ENGHRAIFFT

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 5-1 \\ 3+2 & 4+5 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

ond nid yw

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

wedi ei ddiffinio. Os yw

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{ac} \quad \alpha = -2, \textbf{ yna mae}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ -6 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Mae'r diffiniadau o adio matricsau ac o luosi sgalar yn syml ac yn ôl y disgwyl; ond fel cymhelliant i luosi matricsau ystyrir y canlynol.

Cymerer fod gennym y ddwy system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{rcccccc} y_1 & = & \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \alpha_{13}x_3 \\ y_2 & = & \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \alpha_{23}x_3 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & = & \beta_{11}z_1 & + & \beta_{12}z_2 \\ x_2 & = & \beta_{21}z_1 & + & \beta_{22}z_2 \\ x_3 & = & \beta_{31}z_1 & + & \beta_{32}z_2 \end{array}.$$

Yna, trwy amnewid yr ail system yn y system cyntaf ceir fod

$$\begin{array}{rcccccc} y_1 & = & \alpha_{11}(\beta_{11}z_1 + \beta_{12}z_2) & + & \alpha_{12}(\beta_{21}z_1 + \beta_{22}z_2) & + & \alpha_{13}(\beta_{31}z_1 + \beta_{32}z_2) \\ y_2 & = & \alpha_{11}(\beta_{11}z_1 + \beta_{12}z_2) & + & \alpha_{22}(\beta_{21}z_1 + \beta_{22}z_2) & + & \alpha_{23}(\beta_{31}z_1 + \beta_{32}z_2) \end{array}$$

ac o ail drefnu, ceir fod

$$\begin{array}{rcccc} y_1 & = & (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31})z_1 & + & (\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32})z_2 \\ y_2 & = & (\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31})z_1 & + & (\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32})z_2 \end{array}.$$

Felly, mewn geiriau eraill, os mai $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$ **a** $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{pmatrix}$ **yw matricsau cyfernod y ddwy system, yn ôl eu trefn, yna matrics cyfernod y system uchod a grewyd, a ddynodir gan** AB**, yw**

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} \end{pmatrix}.$$

Hynny yw, os yw A **yn fatrics** 2×3 **a** B **yn fatrics** 3×2**, yna mae** AB **yn fatrics** 2×2**. Noder hefyd, er enghraifft, fod yr elfen-**$(1, 1)$ **yn** AB **wedi ei gael trwy luosi yr elfennau yn y res gyntaf o** A **gyda'r elfennau cyfatebol yng ngholofn gyntaf yn** B **ac yna cymeryd eu swm.**

Cymerwn hwn fel sylfaen i'r rheol ganlynol sy'n ddiffinio lluosoi matricsau.

Diffiniad 1.13 Lluosi Matricsau ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij})$ ***yn fatrics*** $m \times n$ ***a*** $B = (\beta_{ij})$ ***yn fatrics*** $p \times q$***, yna diffinir y matrics*** AB ***os a dim ond os yw*** $n = p$ ***ac yna*** AB ***yw'r matrics*** $m \times q$

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} \right),$$

hynny yw, **ceir yr elfen-**(i, j) **o** AB **trwy luosi elfennau yr** i**-fed res o** A **gyda'r elfennau cyfatebol yn yr** j**-fed golofn o** B **ac yna cymeryd eu swm.**

Felly, os yw $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ **a** $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nq} \end{pmatrix}$ **yna**

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1q}+\alpha_{12}\beta_{2q}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{nq} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1q}+\alpha_{22}\beta_{2q}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{nq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta_{11}+\alpha_{m2}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n1} & \alpha_{m1}\beta_{12}+\alpha_{m2}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1q}+\alpha_{m2}\beta_{2q}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{nq} \end{pmatrix}$$

Hefyd, gellir mynegi y system o m **hafaliadau llinol mewn** n **newidyn** $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ **mewn ffurf matrics fel** $AX = b$**, lle mae**

$$A = (\alpha_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

ENGHRAIFFT

Os yw $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **a** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**, yna mae** AB **wedi ei ddiffinio ac** AB **yw'r matrics** 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} 2.1 + 5.(-1) + 3.2 & 2.0 + 5.1 + 3.1 \\ 1.1 + 2.(-1) + (-1).2 & 1.0 + 2.1 + (-1).1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mae'r matrics BA **hefyd wedi ei ddiffinio, sef y matrics** 3×3

$$BA = \begin{pmatrix} 1.2 + 0.1 & 1.5 + 0.2 & 1.3 + 0.(-1) \\ (-1).2 + 1.1 & (-1).5 + 1.2 & (-1).3 + 1.(-1) \\ 2.2 + 1.1 & 2.5 + 1.2 & 2.3 + 1.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \\ 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Noder, yn yr enghraifft yma, nid yw AB **a** BA **hyd yn oed o'r un siâp, ac felly yn gyffredinol mae** $AB \neq BA$**. Hyd yn oed os yw** AB **a** BA **o'r un siâp, yn gyffredinol mae** $AB \neq BA$**, fel y gwelir o'r enghraifft ganlynol. Os yw**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

yna gwelir bod

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{a} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gwelir felly, wrth luosi matricsau, nad yw un o ddeddfau algebra, sef y ddeddf cymudol, yn cael ei bodlonni. Felly mae'n rhaid bod yn ofalus wrth drin matricsau - ni ellir eu trafod fel pe baent yn rifau. Gan y bydd gweddill y llyfr yma yn trin gryn dipyn a'r fatricsau, ceir cysur o'r theorem nesaf sy'n dangos nad oes cyfyngiadau pellach.

Theorem 1.14 ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij})$***,*** $B = (\beta_{ij})$ ***a*** $C = (\gamma_{ij})$ ***yn fatricsau*** $m \times n$***,*** $s \times t$ ***a*** $p \times q$ ***yn ôl eu trefn, yna mae***

(i) ***(Deddf Cymudol Adio)***
$A + B = B + A$***, lle diffinnir y ddwy ochor i'r hafaliad os a dim ond os yw*** $m = s, n = t$***.***

(ii) ***(Deddf Cysylltiadol Adio)***
$(A + B) + C = A + (B + C)$***, lle diffinnir y ddwy ochor yr hafaliad os a dim ond os yw*** $m = s = p, n = t = q$***.***

(iii) $A + 0 = A$

(iv) $A + (-A) = 0$

(v) ***(Deddf Cysylltiadol Lluosi)***
$A(BC) = (AB)C$***, lle diffinnir y ddwy ochor yr hafaliad os a dim ond os yw*** $n = s, t = p$***.***

(vi) ***(Deddfau Ddosbarthol De a Chwith)***
$A(B + C) = AB + AC$***, lle diffinnir y ddwy ochor yr hafaliad os a dim ond os***

***yw** $n = s = p, t = q$,*
*$(B + C)A = BA + CA$, **lle diffinnir y ddwy ochor yr hafaliad os a dim ond os yw** $s = p, t = q = m$,*

PRAWF Profir (v) yn unig, mae prawf y gweddill yn eithaf tebyg.

Gwelir fod AB wedi ei ddiffinio os a dim ond os yw $n = s$ ac mae yn fatrics $m \times t$ ac felly, mae $(AB)C$ wedi ei ddiffinio os a dim ond os yw $n = s, t = p$ ac mae yn fatrics $m \times q$. Yn yr un modd, gwelir fod BC wedi ei ddiffinio os a dim ond os yw $t = p$ ac mae yn fatrics $s \times q$ ac felly, mae $A(BC)$ wedi ei ddiffinio os a dim ond os yw $n = s, t = p$ ac mae hefyd yn fatrics $m \times q$.

Felly, gwelir fod $(AB)C$ a $A(BC)$ yn bodoli o tan yr un amodau ac hefyd maent o'r un siâp. Trwy ddefnyddio y rheol lluosi matricsau, gwelir ymhellach eu bod hefyd yn hafal i'w gilydd. Hynny yw

$$\begin{aligned}
AB &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}\right)_{m\times t} \\
(AB)C &= \left(\sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kl}\right)\gamma_{lj}\right)_{m\times q} \\
BC &= \left(\sum_{l=1}^{t} \beta_{il}\gamma_{lj}\right)_{s\times q} \\
A(BC) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\left(\sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}\gamma_{lj}\right)\right)_{m\times q} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik}\beta_{kl})\gamma_{lj}\right)_{m\times q} \\
&= (AB)C.
\end{aligned}$$

Yn barod, gwelwyd fod angen bod yn ofalus wrth drafod matricsau, dyma engraifftiau eraill i ddangos beth all ddigwydd, a bod rhaid meddwl yn ofalus wrth drafod matricsau.

(i) Os yw $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, yna gwelir fod $AB = 0$ er nad yw A na B yn 0.

(ii) Os yw $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ yna gwelir fod $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Felly,

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C;$$

hefyd gall $A(B - C) = 0$ fod yn wir, er fod $A \neq 0$ a $B \neq C$.

Ymarferion 1.4

1. **Adiwch a lluoswch y matricsau canlynol (os yw hynny'n bosibl)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hefyd, profwch y rheolau cysylltiadol a dosbarthol ar y matricsau yma.

2. **Os yw'r matrics** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **yn cymudo gyda'r matrics** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$**, yna dangoswch fod** $b = c = 0$**. Felly, dangoswch os bod** A **yn cymudo gyda** ***pob*** **matrics** 2×2**, yna cymer y ffurf**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. **Defnyddiwch y ffaith fod matrics sgwar** X **yn cymudo gyda** X^2 **i ddangos os yw**

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

yna mae X **o'r ffurf** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$**. Felly, darganfyddwch pob matrics sy'n bodloni yr hafaliad uchod.**

4. **Os yw** $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$**, yna profwch am bob integryn positif** n**, bod**

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}.$$

Gwirwch fod y canlyniad yn wir hefyd pan mae n **yn integryn negyddol.**

5. **Darganfyddwch y matrics real** $n \times n$ **mwyaf cyffredinol sy'n cymudo gyda'r matrics** $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Mathau Arbennig o Fatricsau

1. MATRICS UNFATHOL. ***Gelwir y matrics*** $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yn **fatrics unfathol*****, a ddynodir gan*** I_n ***(neu*** I***), hynny yw*** $I_n = (\alpha_{ij})$***, lle mae*** $\alpha_{ij} = 1,\ \alpha_{ij} = 0\ (i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j)$***.***

Mae gan y matrics I_n **y priodwedd**

$$AI_n = I_nA = A$$

am bob matrics $n \times n$ A**.**

2. MATRICS CROESLIN.

Gelwir y matrix $n \times n$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

yn **fatrics croeslin*****, a ddynodir gan diag***$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$***.***

3. MATRICS GWRTHDRO.

Os yw A ***yn fatrics*** $n \times n$ ***yna gelwir unrhyw fatrics*** $n \times n$ B ***gyda'r priodwedd***

$$AB = BA = I_n$$

yn **wrthdro** ***i'r matrics*** A***.***

Gellir profi dau ganlyniad hawdd, ond pwysig, i'r diffiniad hwn.

Lemma 1.15 ***Mae'r gwrthdro i fatrics yn unigryw.***

PRAWF Gadawer i B **a** C **fod yn fatricsau gwrthdro i'r matrics** A**. Yna mae**

$$AB = BA = I_n \text{ ac } AC = CA = I_n.$$

Felly, gwelir bod

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B,$$

hynny yw, mae'r ddau wrthdro i A **yn hafal.**

Dynodir y gwrthdro unigryw hwn gan y nodiant unigryw, A^{-1}**. Gelwir matrics sydd gan wrthdro yn fatrics gwrthdro neu anhynod; os nad oes ganddo wrthdro dywedir ei fod yn anwrthdro neu hynod.**

Lemma 1.16 ***Os yw A a B yn fatricsau $n \times n$ gwrthdro, yna mae AB yn wrthdro ac mae $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.***

PRAWF Os yw A a B yn fatricsau gwrthdro, yna mae $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ a $BB^{-1} = I_n = B^{-1}B$. Yn awr, gwelir fod

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB),$$

felly mae AB yn wrthdro, a gan fod y gwrthdro yn unigryw trwy Lemma 1.15, ceir fod

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Canlyneb 1.17 ***Os yw $A_1, A_2, \ldots, A_k$ yn fatricsau $n \times n$ gwrthdro, yna mae $A_1A_2\ldots A_k$ yn wrthdro ac mae***

$$(A_1A_2\ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

PRAWF Trwy ddefnyddio anwythiad ar k.

Ymhellach ymlaen yn y bennod hon cyflwynir dull o gyfrifo y gwrthdro o fatrics, hefyd, dangosir sut mae penderfynu a yw matrics yn anhynod, sef bod ganddo wrthdro.

4. TRAWSDDODYN O FATRICS.

Os yw $A = (\alpha_{ij})$ yn fatrics $m \times n$, y trawsoddodyn o A yw'r matrics $n \times m$ a ddynodir gan A^t a geir trwy gydgyfnewid rhesi a cholofnau A, hynny yw

$$A^t = (\beta_{ij}),$$

lle mae $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$.

ENGHRAIFFT

Os yw $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **yna mae** $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Gwelir y bydd y canlyniad canlynol o ddefnydd ymhellach ymlaen.

Lemma 1.18 ***Os yw A a B yn fatricsau $m \times n$ a $p \times q$ yn ôl eu trefn, yna***

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$, lle diffinnir y ddwy ochor os a dim ond os yw $m = p, n = q$.

(ii) $(AB)^t = B^tA^t$ lle diffinnir y ddwy ochor os a dim ond os yw $n = p$.

PRAWF Profir (ii) yn unig gan mai hwn yw'r mwyaf cymhleth o'r ddau, profir (i) yn yr un modd.

Diffinnir AB os a dim ond os yw $n = p$ ac mae yn fatrics $m \times q$. Felly, diffinnir $(AB)^t$ os a dim ond os yw $n = p$ ac mae $(AB)^t$ yn fatrics $q \times m$. Yn yr un modd, gwelir fod B^tA^t yn bodoli o tan yr un amodau.

Os yw $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$, $B = (\beta_{ij})_{n\times q}$, yna mae

$$\begin{aligned} (AB)^t &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}\right)^t \\ &= (\gamma_{ij})_{q\times m}, \end{aligned}$$

lle mae $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_{ki}$**. Os yw** $A^t = (\alpha'_{ij})_{n\times m}$**,** $B^t = (\beta'_{ij})_{q\times n}$**, yna mae**

$$\begin{aligned} B^tA^t &= \left(\sum_{k=1}^{n} \beta'_{ik}\alpha'_{kj}\right)^t \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_{ki}\right)_{q\times m} \\ &= (AB)^t, \end{aligned}$$

fel sydd ei angen.

Canlyneb 1.19 ***Os yw*** $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ***yn*** k ***o fatricsau lle mae gan*** A_{i+1} ***yr un nifer o resi ac sydd gan*** A_i ***o golofnau*** $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$***, yna***

$$(A_1A_2\ldots A_k)^t = A_k^tA_{k-1}^t\ldots A_1^t.$$

PRAWF Mae'r prawf yn un syml trwy ddefnyddio anwythiad ar k**.**

Lemma 1.20 ***Os yw*** A ***yn fatrics*** $n\times n$***, yna mae*** A^t ***yn wrthdro os a dim ond os yw*** A ***yn wrthdro. Hefyd, mae*** $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$***.***

PRAWF Os yw A **yn wrthdro, yna mae** $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$**, a thrwy gymeryd trawsddodau o bob ochor cawn fod** $(A^{-1})^tA^t = I_n = A^t(A^{-1})^t$ **ac felly mae** A^t **yn wrthdro. Gellir profi y gwrthwyneb yn yr un modd. Hefyd, trwy ddefnyddio Lemma 1.15, gwelir fod** $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$**.**

5.MATRICSAU CYMESUR, CYMESUR-SGIW AC ORTHOGONOL.

Mae matrics $n\times n$ **yn**

(i) Fatrics Cymesur os yw $A^t = A$

(ii) Fatrics Cymesur-sgiw os yw $A^t = -A$

(iii) Fatrics Orthogonol os yw $A^tA = AA^t = I_n$

ENGHREIFFTIAU

Mae

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \quad \textbf{yn fatrics cymesur},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{yn fatrics sgiw-gymesur},$$

ac

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{yn fatrics orthogonol}.$$

Sylwadau

1. Mewn matrics gymesur, mae'r elfennau yn gymesur o gwmpas croeslin y matrics.

2. Mewn matrics gymesur-sgiw, mae'r elfennau ar y croeslin i gyd yn sero.

3. Os A yn fatrics orthogonal, yna ei wrthdro yw A^t.

Ymarferion 1.5

1. Os yw A yn fatrics $n \times n$, yna profwch fod

(i) A^tA yn fatrics gymesur,

(ii) $A + A^t$ yn fatrics gymesur ac $A - A^t$ yn fatrics gymesur-sgiw,

(iii) A yn swm o fatrics gymesur a matrics gymesur-sgiw.

2. Os yw A a B yn fatricsau cymesur a gymesur-sgiw yn ôl eu trefn, gyda $AB = BA$ ac $A + B$ yn anhynod, profwch fod y matrics $(A+B)^{-1}(A-B)$ yn orthogonol.

3. Profwch, os yw $I + SA$ yn anhynod, lle mae A yn fatrics gymesur ac S yn fatrics gymesur-sgiw, yna mae'r matrics

$$L = (I - SA)(I + SA)^{-1}$$

yn bodlonni $L^tAL = A$. I'r gwrthwyneb, os yw $L^tAL = A$, lle mae A yn gymesur ac $I+L$ ac A yn anhynod, dangoswch fod $S = (I+L)^{-1}(I-L)A^{-1}$ yn gymesur-sgiw.

4. Os yw

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dangoswch fod $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha + \beta)$. Felly, darganfyddwch y gwrthdro o $A(\alpha)$.

Dangoswch fod

$$A(3\alpha) - 3A(2\alpha) + 3A(\alpha) = 1$$

ac felly, darganfyddwch hafaliad ciwbig a fodlonnir gan $A(\alpha)$.

5. Os yw A yn fatrics real, ysgrifennwch swm yr elfennau cromlin A^tA yn nhermau elfennau A. Felly, os yw A a B yn real a chymesur ac C yn real ac yn gymesur-sgiw yna dangoswch fod $A^2 + B^2 = C^2$ yn golygu fod $A = B = C = 0$. A yw'r canlyniad hwn yn parhau i fod yn wir os nad yw A o angenrhaid yn gymesur?

6. Profwch fod pob matrics X sy'n bodloni $X^tAX = B$, lle mae $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gan y ffurf yntau

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\alpha^{-1} \\ \alpha & -\frac{1}{2}\alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{neu} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\alpha^{-1} \\ -\alpha & \frac{1}{2}\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Darganfyddwch bob matrics X sy'n bodloni y berthynas ychwanegol $X^tX = I$.

1.6 Matricsau Elfennol

Diffiniad 1.21 ***Gelwir matrics $n \times n$ yn* fatrics elfennol *os gellir ei ffurfio trwy weithredu gweithred elfennol ar y matrics unfathol I_n.***

Felly, y matricsau elfennol yw un o'r tri math sy'n deillio o'r gweithreoedd rhes elfennol

$$r_i \to \alpha r_i, \;\; r_i \leftrightarrow r_j, \;\; r_i \to r_i + \alpha r_j$$

yn ôl eu trefn:

$$M_i(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$H_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \alpha & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n),$$

lle mae pob elfen arall oddiar y croeslin yn sero.

Lemma 1.22 ***(i) Os yw'r matrics*** $m \times n$ B ***yn deillio o'r matrics*** $m \times n$ A ***trwy weithred res elfennol, yna*** B ***yw'r matrics a geir o gymeryd y lluoswm o'r matrics*** $m \times m$ ***elfennol cyfatebol gyda'r matrics*** A***, hynny yw, os*** e ***yw'r weithred rhes elfennol, yna***

$$B = e(A) = e(I_m)A.$$

(ii) Mae bob matrics elfennol yn wrthdro; mae'r gwrthdro o bob matrics elfennol yn fatrics elfennol.

PRAWF Profir y ddau osodiad yma trwy ystyried y tair gweithred rhes elfennol ar wahan. Gadawer i $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$**.**

(i) $r_i \to \alpha r_i$**, yna mae**

$$\begin{aligned} M_i(\alpha)A &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,2} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha\alpha_{i1} & \alpha\alpha_{i2} & \cdots & \alpha\alpha_{in} \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,2} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ac yn yr un modd, yn yr achos $r_i \leftrightarrow r_j$, mae

$$H_{ij}A \quad = \quad \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

ac yn yr achos $r_i \to r_i + \alpha r_j$, mae

$$A_{ij}(\alpha)A \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} + \alpha\alpha_{j1} & \alpha_{i2} + \alpha\alpha_{j2} & \cdots & \alpha_{in} + \alpha\alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

(ii) Yn yr achos yma, gwirer fod

$$(M_i(\alpha))^{-1} = M_i(1/\alpha), \;\; (H_{ij})^{-1} = H_{ij} \;\; \textbf{ac} \;\; (A_{ij}(\alpha))^{-1} = A_{ij}(-\alpha).$$

ENGHRAIFFT
Os yw

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ac felly

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hefyd, gwelir fod

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, gellir profi prif ganlyniad y rhan yma. Nid yw yn ganlyniad gyda cymwysiadau ymarferol; fel y gwelir, ei brif werth yw ei fod yn rhoi disgrifiad manwl o'r broses a ddisgrifwyd uchod mewn ffurf y gellir ei ddefnyddio ymhellach ymlaen i gyfiawnhau dulliau i ddatrys problemau ymarferol.

Theorem 1.23 ***Os yw'r matrics*** $m \times n$ A ***yn rhes gymesur a'r matrics*** $m \times n$ B***, yna bodola rhif meidraidd o fatricsau elfennol*** $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ***fel bod***

$$B = E_1 E_2 \ldots E_k A.$$

PRAWF Yn Theorem 1.5 gwelwyd y gellir cael B **o** A **trwy ddilyniant meidradd,** k **dyweder, o weithrediadau res elfennol. Mae'r prawf trwy anwythiad ar** k**. Os yw** $k = 1$**, yna trwy Lemma 1.22(i) gwelir fod** $B = E_1 A$ **am rhyw fatrics elfennol** E_1**.**

Os yw $k > 1$**, tybier bod** B' **yn fatrics a geir o'r matrics** A **trwy** $k - 1$ **gweithred res elfennol, yna bodola matricsau elfennol** $E_2, E_3, \ldots, E_k$ **fel bod**

$$B' = E_2 E_3 \ldots E_k A.$$

Yn awr, gellir cael B **o'r matrics** B' **trwy ddefnyddio un weithred res elfennol ychwanegol ac felly, eto trwy ddefnyddio Lemma 1.22(i) gwelir fod**

$$B = E_1 B'$$

am rhyw weithred rhes elfennol E_1**, ac felly**

$$B = E_1(E_2 E_3 \ldots E_k A) = E_1 E_2 \ldots E_k A$$

fel sy'n ofynol.

Mae dau ganlyneb pwysig i'r theorem yma.

Canlyneb 1.24 ***Os R yw matrics elfennol gostyngol A, yna bodola rhif meidraidd o fatricsau elfennol $E_1, E_2, \ldots, E_k$ fel bod***

$$A = E_1 E_2 \ldots E_k R.$$

PRAWF Trwy Theorem 1.23, bodola matricsau elfennol $E'_1, E'_2, \ldots, E'_k$ fel bod

$$R = E'_1 E'_2 \ldots E'_k A.$$

Ond trwy Lemma 1.22 (ii) gwelir fod pob matrics elfennol yn anwythol ac felly mae ei gwrthdro hefyd yn fatricsau elfennol. Felly, gwelir fod

$$A = E'^{-1}_k E'^{-1}_{k-1} \ldots E'^{-1}_1 R$$

fel sy'n ofynol.

Canlyneb 1.25 ***Mae'r datganiadau canlynol yn gywerth.***

(i) ***mae'r matrics $n \times n$ A yn wrthdro,***

(ii) ***nid oes gan y system homogenaidd $AX = 0$ o n hafaliad llinol mewn n newidyn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ddatrysiad annistadl,***

(iii) ***mae A yn luoswm o fatricsau elfennol.***

PRAWF (i) $\Rightarrow$ (ii) Os yw A yn wrthdro, yna gwelir nad oes gan y system o n hafaliad llinol mewn n newidyn $AX = 0$ ddatrysiad annistadl, gan fod

$$X = I_n X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}(0) = 0.$$

(ii) $\rightarrow$ (iii) Trwy Ganlyneb 1.11, matrics echelon gostyngol A yw I_n a thrwy Ganlyneb 1.24 uchod mae

$$A = E_1 E_2 \ldots E_k$$

yn luoswm o fatricsau elfennol.

(iii) $\rightarrow$ (i) Os yw $A = E_1 E_2 \ldots E_k$, lle mae pob E_i yn fatrics elfennol, yna trwy Ganlyneb 1.17 gwelir fod

$$A^{-1} = E^{-1}_k E^{-1}_{k-1} \ldots E^{-1}_1$$

ac felly mae A yn wrthdro.

Felly, er mwyn penderfynu a yw matrics yn wrthdro a'i peidio, nodir os mai R yw matrics echelon gostyngol y matrics A ac

(i) os yw $R = I_n$, yna mae'r matrics A yn wrthdro,

(ii) os yw R yn cynnwys rhes o seroau, yna nid yw A yn wrthdro.

Ond yn ychwanegol, mae'r ganlyneb yn arwain i fethod hollol ymarferol i gyfrifo y gwrthdro o fatrics os yw yn anhynod neu yn wrthdro. Os yw A yn anhynod, yna matrics echelon gostyngol A yw'r matrics unfathol I_n. Os $E_1, E_2, \ldots, E_k$ yw'r matricsau elfennol sy'n cyfateb i'r gweithredoedd rhes elfennol a weithredir ar A i roi'r matrics I_n, hynny yw,

$$I_n = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$$

yna mae

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n$$

ac felly, trwy ddefnyddio Canlyneb 1.17, gwelir fod

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_1 I_n.$$

Hynny yw, darganfyddir A^{-1} trwy weithredu yr union weithrediadau rhes elfennol ar I_n yn yr union un drefn a ddefnyddiwyd i gael y matrics I_n o'r matrics A.

Mae'r enghraifft ddilynol yn arddangos hyn, yn wir, yn dangos y modd mwyaf effeithiol o gyflawni a chyflwyno y gwaith.

ENGHREIFFTIAU

1. **Dangosir sut i ddarganfod gwrthdro y matrics** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow \frac{1}{8} r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right).$$

Felly,

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. **A yw'r matricsau (i)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **yn wrthdro?**

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ac felly nid yw A yn wrthdro (gan ei fod yn cynnwys rhes o seroau).

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 + r_2 \\ r_3 \to r_3 - r_2}]{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ac felly mae A yn wrthdro.

Ymarferion 1.6

1. Darganfyddwch wrthdroadau y matricsau canlynol (os ydynt yn bodoli)

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(iv)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(vi)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ **(vii)** $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 1+i \\ 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

where $i = \sqrt{-1}$**.s**

1.7 Gweithrediadau Colofn Elfennol a Matricsau Cywerth

Datblygwyd y rhan helaethaf o'r bennod hon yn nhermau gweithreiadau rhes elfennol. Mae'n amlwg y gellir addasu y diffiniad o weithreiadau rhes elfennol (Diffiniad 1.2) a matricsau rhes gywerth (Diffiniad 1.3) mewn modd hollol eglur i ddiffinio gweithrediadau colofn elfennol ar fatrics ac hefyd matricsau golofn gywerth.

Yn Theorem 1.23, gwelwyd os mai R **yw matrics rhes echelon matrics** $m \times n$ A**, yna bodola matrics gwrthdro** P **fel bod**

$$PA = R.$$

Yn wir, mae'n hawdd cyfrifo P**, trwy ddefnyddio Theorem 1.23 gwelir fod**

$$R = E_1 E_2 \dots E_k A$$

lle mae $E_k, E_{k-1}, \dots, E_1$ **yw'r matricsau elfennol sy'n cyfateb i'r dilyniant o weithrediadau rhes elfennol a ddefnyddiwyd yn eu tro i gael** R **o'r matrics** A**. Felly, ceir bod**

$$P = E_1 E_2 \dots E_k = E_1(E_2(\dots E_{k-1}(E_k I_m)) \dots)$$

ac felly ceir y matrics P **trwy weithredu a'r y matrics** I_m **yr union weithrediadau res elfennol, yn yr un drefn, ac a ddefnyddiwyd i gael** R **o'r matrics** A **(cymharer hyn gyda'r broses a ddefnyddiwyd i benderfynu y gwrthdro o fatrics gwrthdro yn adran 1.6 uchod).**

ENGHRAIFFT

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 \to r_3 - 2r_2}{\overset{r_1 \to r_1 - 2r_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_3\to r_3-r_1 \\ \longrightarrow \\ r_1\to -\frac{1}{5}r_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_1\leftrightarrow r_2 \\ \longrightarrow \\ r_1\to r_1-2r_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Gellir gwirio fod

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mae gan Theorem 1.5 a Theorem 1.23 eu datganiadau cywerth yn nhermau gweithredoedd colofn elfennol. Yn arbennig gellir profi y theorem ganlynol.

Theorem 1.26 ***Os yw matrics*** $m \times n$ A ***yn golofn gywerth i fatrics*** $m \times n$ B ***yna bodola rhif meidraidd o fatricsau elfennol*** $E_1, E_2, \ldots, E_l$ ***fel bod***

$$B = AE_1E_2\ldots E_l.$$

Felly, trwy ganlyn yr un ymresymiad a ddefnyddiwyd uchod, gwelir y bodola matrics $n \times n$ $Q = E_1E_2\ldots E_l$ **fel bod** $B = AQ$**.**

Os gweithredir hyn yn arbennig ar matrics echelon gostyngol R **o fatrics** $m \times n$ A**. Cymerir fod yr** 1**-oedd cyntaf yn** R **yn ymddangos yng ngholofnau** $j_1, j_2, \ldots, j_r$**, yna trwy dynnu lluosrifau cyfaddas o'r colofnau hyn o'r colofnau sy'n eu dilyn ac yna trwy gyfnewid y colofnau** $c_1 \leftrightarrow c_{j_1}$**,**$c_2 \leftrightarrow c_{j_2}$**,** $\ldots$**,**$c_r \leftrightarrow c_{j_r}$ **fe welir fod** R **yn golofn gywerth a matrics** N **o'r ffurf**

$$N = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

lle mae $I_{r\times r}$ **yw'r matrics unfathol** $r \times r$ **ac** $0_{p\times q}$ **yw'r matrics sero** $p \times q$**.**

Gellir datgan hyn ar ffurf y theorem ganlynol.

Theorem 1.27 ***Os yw*** A ***yn fatrics*** $m \times n$***, yna bodola matrics*** $m \times m$ ***gwrthdro*** P ***a matrics*** $n \times n$ ***gwrthdro*** Q ***fel bod***

$$PAQ = N,$$

lle mae N ***yw'r matrics a nodwyd uchod.***

Fel eglurwyd uchod, mae'n fater hawdd i gyfrifo y matricsau P **a** Q **fel a welir yn yr enghraifft ganlynol.**

ENGHRAIFFT

Os yw $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix}$**, gwelir yn yr enghraifft ddiwethaf, os** $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$**, yna mae**

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, gwelir fod

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 - \frac{2}{5}c_2 \\ c_4 \to c_4 + \frac{3}{5}c_2}]{\substack{c_3 \to c_3 - \frac{1}{5}c_1 \\ c_4 \to c_4 - \frac{1}{5}c_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ac os rhoddir $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, yna mae**

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mae hyn yn arwain i'r diffiniad canlynol

Diffiniad 1.28 ***Mae dau fatrics*** $m \times n$ A ***a*** B ***yn*** **gywerth** ***os bodola matricsau gwrthdro*** P ***a*** Q ***fel bod***

$$PAQ = B.$$

Mae'n hawdd profi fod hon yn berthynas cywerthedd ar y set o fatricsau, mae'n berthynas gymesur gan fod $P^{-1}BQ^{-1} = A$ **ac hefyd os yw** $PAQ = B$ **a** $UBV = C$**, lle mae** P, Q, U **a** V **yn fatricsau gwrthdro, yna mae** $(UP)A(QV) = C$ **gyda** UP **a** QV **yn fatricsau gwrthdro. Felly, beth a brofwyd yw fod pob matrics** $m \times n$ A **yn gywerth a matrics o'r ffurf syml** N **uchod, lle mae** r **yw'r nifer o resi ansero yn matrics echelon gostyngol** A**. Gellir ystyried** N **fel ffurf ganonaidd o** A **o tan y berthynas gywerthedd hon, hynny yw, cynrychiolydd o'r dosbarth gywerthedd sy'n cynnwys** A **o tan y berthynas gywerthedd. Ymhellach ymlaen, ym Mhennod 4 (gweler Theorem 4.25), gwelir fod** r **yn rif sefydlog i'r matrics** A**, a elwir yn ranc y matrics** A**. Hefyd, gelwir** N **yn Ffurf Normal Smith o'r matrics** A**.**

Ymarferion 1.7

1. Darganfyddwch fatricsau gwrthdro P a Q fel bod PAQ mewn ffurf normal am y matricsau A canlynol

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(iv)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Darganfyddwch pa rai o'r matricsau canlynol sy'n gywerth.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(v)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Chapter 2

Determinantau

Gadawer i $M_n(K)$ sefyll am y set o fatricsau $n \times n$ dros faes K.

2.1 Determinantau 2×2 a 3×3

Yn gyntaf, er mwyn cymhellu ein hastudiaeth o ddeterminantau $n \times n$, ystyrir determinantau 2×2 a 3×3.

Gadawer i $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$, yna diffinnir y ffwythiant $\det : M_2(K) \to K$ gan

$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \in K.$$

Weithiau hefyd, ysgrifennir $|A|$ am $\det A$ - hyd at yr ymarferion yn yr adran hon defnyddiwn y nodiant $\det$ i bwysleisio mai ffwythiant ydyw.

Mae'r ystyriaeth o ddeterminantau yn codi yn hollol naturiol yn y cyswllt o ddatrys system o hafaliadau llinol, fel gwelir wrth ystyried y system o ddwy hafaliad llinol mewn dau newidyn

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & = & \beta_2. \end{array}$$

Yna, gwelir fod

$$x_1 = \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{pmatrix}}{\det A}$$

ac

$$x_2 = \frac{\alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{11}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{pmatrix}}{\det A.}$$

Felly, gwelir ei bod yn bosibl i fynegi y datrysiad yn hollol echblyg yn nhermau determinantau. Hefyd, gwelir yn awr ei bod yn bosibl i brofi nifer

o ganlyniadau o'r diffiniad a gwelir yn y man eu bod yn ganolog pan ddeuir i ddiffinio determinantau yn gyffredinol.

(i)

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix},$$

hynny yw, o ddefnyddio y diffiniad uchod, gwelir fod $\alpha_{11}(\alpha_{22}+\beta_{22})-\alpha_{12}(\alpha_{21}+\beta_{21}) = (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}) + (\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})$**. Mewn geiriau eraill, os yw** $r_1 = (\alpha_{11},\alpha_{12})$**,** $r_2 = (\alpha_{21},\alpha_{22})$**,** $r_2' = (\beta_{21},\beta_{22})$ **yn resi matrics, yna mae**

$$\det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2+r_2'\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2'\end{pmatrix}.$$

Yn yr un modd, gellir profi'n hawdd fod y canlynol yn wir.

(ii) $\det\begin{pmatrix}\alpha r_1\\ r_2\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$**, am bob** $\alpha\in K$**,**

(iii) $\det\begin{pmatrix}r_1+\alpha r_2\\ r_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$**,**

(iv) $\det\begin{pmatrix}r_1\\ r_1\end{pmatrix} = 0$**,**

(v) $\det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}r_2\\ r_1\end{pmatrix}$**,**

(vi) $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$

(vii) $\det A^t = \det A$**.**

Golyga (i) a (ii) fod y ffwythiant $\det$ **yn llinol ar resi matrics** A**, hynny yw**

$$\det\begin{pmatrix}r_1+\alpha r_1'\\ r_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix} + \alpha\det\begin{pmatrix}r_1'\\ r_2\end{pmatrix}.$$

Golyga (vii) y gellir datgan (i)-(v), a'i canlyniadau, yn nhermau colofnau hefyd, er enghraifft,

$$\det(c_1+\alpha c_1', c_2) = \det(c_1,c_2) + \alpha\det(c_1',c_2).$$

Nid yw'r cyfan o'r canlyniadau uchod yn annibynnol o'i gilydd fel gwelir wrth ystyried yr achos mwyaf cyffredinol. Mae'r canlyniadau hyn yn ddefnyddiol wrth gyfrifo determinantau ond rhaid pwysleisio ei bod cyn gyflymed i ddefnyddio'r diffiniad yn uniongyrchol wrth gyfrifo yr achos 2×2**. Ond pan ddeiir i'r achos cyffredinol, gwelir mai'r canlyniadau fydd yn rhoi'r ffordd mwyaf effeithiol o weithredu'r cyfrifiad. Er enghraifft, o ddefnyddio y diffiniad, gwelir fod**

$$\det\begin{pmatrix}x & y\\ x^3 & y^3\end{pmatrix} = xy^3 - x^3y = xy(y^2-x^2),$$

ond trwy ddefnyddio y canlyniadau gwelir fod

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} x & y \\ x^3 & y^3 \end{pmatrix} &= xy\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix} && \textbf{trwy (ii)} \\
&= xy\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & y^2-x^2 \end{pmatrix} && \textbf{trwy (iii)} \\
&= xy(y^2-x^2).
\end{aligned}$$

Ystyrir yn awr yr achos o determinantau 3×3**, sef y determinant o fatrics** 3×3**.**

Gadawer i $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\in M_3(K)$**, yna diffinir y ffwythiant** $\det : M_3(K)\to K$ **gan**

$$\det A=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Er bod ffordd arbennig i gofio y ddiffiniad hwn, mae'n amlwg nad yw'n ymarferol i'w ddefnyddio. Ond eto, mae'n hawdd profi canlyniadau tebyg i'r rhai uchod ond wedi eu addasu mewn modd sy'n amlwg. Yn ychwanegol, gellir profi y canlynol sy'n dangos fod ehangiad o determinant 3×3 **yn gallu cael ei ostwng i ehangu nifer o ddeterminantau** 2×2**. Os** A_{ij} **yw'r matrics** 2×2 **a geir trwy ddileu yr** i**-fed res a'r** j**-fed golofn o'r matrics** A**,** $(i,j=1,2,3)$ **yna**

$$\textbf{(viii)}\quad \begin{aligned}
\det A &= \alpha_{11}\det A_{11} - \alpha_{12}\det A_{12} + \alpha_{13}\det A_{13} \\
&= -\alpha_{21}\det A_{21} + \alpha_{22}\det A_{22} - \alpha_{23}\det A_{23} \\
&= \alpha_{31}\det A_{31} - \alpha_{32}\det A_{32} + \alpha_{33}\det A_{33} \\
&= \alpha_{11}\det A_{11} - \alpha_{21}\det A_{21} + \alpha_{31}\det A_{31} \\
&= -\alpha_{12}\det A_{12} + \alpha_{22}\det A_{22} - \alpha_{32}\det A_{32} \\
&= \alpha_{13}\det A_{13} - \alpha_{23}\det A_{23} + \alpha_{33}\det A_{33}.
\end{aligned}$$

Mae'n hawdd gwireddu yr hafaliadau hyn trwy ehangu yr ochor dde ymhob achos, er enghraifft

$$\begin{aligned}
& \alpha_{11}\det A_{11} - \alpha_{12}\det A_{12} + \alpha_{13}\det A_{13} \\
={}& \alpha_{11}\det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{13}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \\
={}& \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31}) \\
={}& \det A.
\end{aligned}$$

I ddarlunio yr uchod, cyfrifir y tair enghraifft ganlynol.

ENGHREIFFTIAU

1. $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3\to r_3+3r_2}{\overset{r_1\to r_1-2r_2}{=}} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (**trwy (iii)**)

$= -\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (**trwy (viii)**) $= 5.$

2.
$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{pmatrix} \textbf{ trwy (iii)} \\
&= \det\begin{pmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{pmatrix} \textbf{ trwy (viii)} \\
&= (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{pmatrix} \textbf{ trwy (ii)} \\
&= (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y+x & z-y \end{pmatrix} \textbf{ trwy (iii)} \\
&\ (y-x)(z-x)(z-y).
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} x+y+z & x & x^3 \\ x+y+z & y & y^3 \\ x+y+z & z & z^3 \end{pmatrix} \\
&= (x+y+z)\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^3 \\ 0 & y-x & y^3-x^3 \\ 0 & z-x & z^3-x^3 \end{pmatrix} \\
&= (x+y+z)(y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & y^2+yx+x^2 \\ 1 & z^2+zx+x^2 \end{pmatrix} \\
&= (x+y+z)(y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & y^2+yx+x^2 \\ 0 & z^2-y^2+(z-y)x \end{pmatrix} \\
&= (x+y+z)^2(y-x)(z-x)(z-y).
\end{aligned}$$

Ymarferion 2.1

Yn yr ymarferion, fel eglurwyd ar ddechrau'r bennod, ysgrifennir $|A|$ am $\det A$.

1. Enrhifwch y determinantau canlynol

(i) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **(iv)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **(v)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

2. Enrhifwch y determinantau canlynol mewn ffactorau

(i) $\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & (b-c)^2 & a^2+2bc \\ c^2+a^2 & (c-a)^2 & b^2+2ca \\ a^2+b^2 & (a-b)^2 & c^2+2ab \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} (x-a)^2 & (x+a)^2 & 2y^2+2z^2 \\ (y-a)^2 & (y+a)^2 & 2z^2+2x^2 \\ (z-a)^2 & (z+a)^2 & 2x^2+2y^2 \end{vmatrix}$ **(v)** $\begin{vmatrix} a(b+c) & (b+c)^2 & a^2-2bc \\ b(c+a) & (c+a)^2 & b^2-2ca \\ c(a+b) & (a+b)^2 & c^2-2ab \end{vmatrix}$

3. Darganfyddwch gwerth mwyaf cyffredinol θ sy'n bodlonni'r hafaliad

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0$$

4. Datryswch yr hafaliad

$$\begin{vmatrix} a-x & b-x & c \\ a-x & c & b-x \\ a & b-x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

2.2 Determinantau $n \times n$

Yn yr rhan cyntaf gwelwyd, hyd yn oed yn yr achos $n = 3$ fod mynegiant echblyg o ddeterminant o fatrics yn eithaf cymhleth. Yn yr enghreifftiau gwelwyd nad y diffiniad ei hun oedd yn ddefnyddiol wrth gyfrifo determinant ond rhai o'u priodweddau a brofwyd fel canlyniad i'r diffiniad. Felly, beth a wneir yn yr achos cyffredinol o ddeterminantau $n \times n$ yw ceisio yn gyntaf brofi fod ffwythiant yn bodoli sydd gan y priodweddau arbennig hyn. Felly, dangosir yn y rhan yma fod y fath ffwythiant yn bod, ac yn ychwanegol fod y ffwythiant hwnnw yn unigryw. Felly, profir y theorem ganlynol.

Theorem 2.1 ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij}) = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in M_n(K)$***, lle mae*** $r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ***yw rhesi y matrics*** A***, yna am bob integryn*** $n > 0$ ***bodola ffwythiant*** $D_n : M_n(K) \to K$ ***gyda'r priodweddau***

(i) mae D_n ***yn llinol ar resi*** A***, hynny yw, am*** $i = 1, 2, \ldots, n$
$D_n(r_1, r_2, \ldots, \alpha r_i + r_i', \ldots, r_n) = \alpha D_n(r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n) + D_n(r_1, r_2, \ldots, r_i', \ldots, r_n)$,

(ii) os yw dwy res nesaf at eu gilydd yn hafal, megis $r_k = r_{k+1}$***, am rhyw*** $k = 1, 2, \ldots, n-1$***, yna mae*** $D_n(A) = 1$***,***

(iii) mae $D_n(I_n) = 1$***, lle mae'r matrics unfathol yw*** I_n***.***

Mae'r ffwythiant a benderfynnir can y tri priodwedd (i),(ii) a (iii) yn unigryw a elwir y* ffwythiant determinant*.

Sylw **Noder mai rhesi y matrics A yw'r r_i ond am resymau argraffyddol amlwg ysgrifennir y matrics A fel $A = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ yn lle $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.**

I brofi y theorem mae angen y diffiniad canlynol.

Diffiniad 2.2 ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$***, gadawer i*** $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ ***sefyll am y matrics*** $(n-1) \times (n-1)$ ***a geir trwy ddileu yr*** i***-fed res a'r*** j***-fed golofn o'r matrics*** A***. Gelwir*** A_{ij} ***y*** **minor** ***o'r elfen*** α_{ij}***.***

Gellir yn awr gyflwyno y prawf o Theorem 2.1.

PRAWF O THEOREM 2.1. Rhenir y prawf i ddau ddarn. Yn gyntaf dangosir fod y ffwythiant D_n yn bodoli, yna profir ei fod yn unigryw.

BODOLAETH Bydd y prawf trwy ddadl anwythol ar yr integryn positif n, hynny yw, cymerir fod determinantau wedi eu diffinio am bob integryn positif sy'n llai nag n. Am ddewis penodol o $j = 1, 2, \ldots, n$, diffinnir $D_n : M_n(K) \to K$ gan

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij},$$

lle mae

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} D_{n-1}(A_{ij}) \in K.$$

Os yw $n = 1$, yna mae'r ffwythiant determinant yn bodoli, hynny yw, rhodder $D_1(A) = \alpha$, os yw $A = (\alpha)$, $\alpha \in K$. Mae'n hawdd gwiro fod y gofynion yn cael eu cyflawni. (Yn wir, gwelwyd yn y rhan gyntaf bod y ffwythiant yn bodoli pan mae $n = 2, 3$ hefyd.)

Dangosir yn awr fod D_n yn bodloni (i),(ii) a (iii) ym mynegiant y theorem.

(i) Ystyrir D_n fel ffwythiant ar y k-fed rhes o A, ac ystyrir am ddewis penodol o $i = 1, 2, \ldots, n$ y term

$$\alpha_{ij} c_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij} D_{n-1}(A_{ij}).$$

Os yw $i \neq k$, nid yw α_{ij} yn ddibynnol ar y k-fed rhes a thrwy anwythiad, gan fod A_{ij} yn fatrics $(n-1) \times (n-1)$ sy'n cynnwys elfennau o'r k-fed rhes o A, mae $D_{n-1}(A_{ij})$ yn llinol ddibynnol ar y k-fed rhes o A. Os yw $i = k$, mae α_{ij} yn llinol ddibynnol ar y k-fed rhes o A tra nad yw $D_{n-1}(A_{ij})$ yn llinol ddibynnol ar y k-fed rhes o A. Felly, mae bob un term yn $D_n(A)$ yn llinol ddibynnol ar y k-fed rhes o A ac felly, mae'r un peth yn wir am $D_n(A)$ hefyd.

(ii) Cymerer fod dwy res o A agosaf i'w gilydd yn hafal, dyweder fod $r_k = r_{k+1}$ am rhyw $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Gadawer i $i \neq k, k+1$, yna mae gan A_{ij} ddwy res nesaf at ei gilydd yn hafal, ac felly o achos yr hypothesis anwythiad gwelir bod $c_{ij} = (-1)^{i+j} D_{n-1}(A_{ij}) = 0$. Felly, mae

$$D_n(A) = \alpha_{kj}(-1)^{j+k} D_{n-1}(A_{kj}) + \alpha_{k+1,j}(-1)^{j+k+1} D_{n-1}(A_{k+1,j}).$$

Ond, mae $A_{kj} = A_{k+1,j}$ ac $\alpha_{kj} = \alpha_{k+1,j}$ (gan fod $r_k = r_{k+1}$) ac felly mae $D_{n-1}(A_{kj}) = D_{n-1}(A_{k+1,j})$ sy'n arwain i'r canlyniad

$$D_n(A) = \alpha_{kj}(-1)^{j+k} D_{n-1}(A_{kj})(1-1) = 0.$$

(iii) Os yw $A = I_n$, yr unig derm yn $D_n(A)$ sy'n rhoi gwerth ansero yw

$$(-1)^{i+i} \alpha_{ii} D_{n-1}(A_{ii}) = 1 D_{n-1}(I_{n-1}) = 1$$

trwy ddefnyddio'r hypothesis anwythiad, hynny yw, $D(I_n) = 1$.

UNIGRYWIAETH Gadawer i $D_n, D'_n : M_n(K) \to K$ fod yn ddau ffwythiant sy'n bodloni (i),(ii) a (iii), yna dangosir fod

$$D_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = D'_n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

am bob $A = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in M_n(K)$. Felly, os yw $A = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ ac

$$\Delta_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = D_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) - D'_n(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

yna i brofi'r unigrywiaeth rhaid profi bod

$$\Delta_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0.$$

Gellir profi bod
(a) Δ_n yn llinol ar resi A,
(b) os yw dwy res o A yn hafal, yna mae $\Delta_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$,
(c) mae $\Delta(I_n) = 0$,
(d) os yw $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ yn aildrefniant o $(1, 2, \ldots, n)$, yna mae

$$\Delta_n(r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_n}) = \pm\Delta_n(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Dilyn (a),(b) a (c) yn uniongyrchol o (i), (ii) a (iii) o'r diffiniad ond mae (d) ychydig yn fwy cymhleth - caiff ei brofi yn y ganlyneb sy'n dilyn. Dibynna'r prawf ar y prawf o fodolaeth y ffwythiant yn unig.
Yn awr, gadawer i

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

yna, am $i = 1, 2, \ldots, n$ mae

$$r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i.$$

Felly, trwy ddefnyddio (a) uchod drosodd a throsodd ceir bod

$$\begin{aligned} &\Delta_n(r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_n}) \\ &= \Delta_n\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} e_k, \alpha_{2k} e_k, \ldots, \alpha_{nk} e_k\right) \\ &= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{n} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n} \Delta_n(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}), \end{aligned}$$

lle mae'r swm dros yr n^n o dermau a geir trwy ganiatau i $k_1, k_2, \ldots, k_n$ gymeryd pob gwerth rhwng 1 ac n. Ond trwy ddefnyddio (b), gwelir os yw unrhyw ddau o'r e_{k_i} yn hafal, yna bydd $\Delta_n(e_{k_1}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_1}) = 0$. Felly, mae'n dilyn fod

$$\Delta_n(r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n} \Delta_n(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}),$$

lle mae'r swm dros yr $n!$ o dermau a geir am bob aildrefniant (trynewid) posibl $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ o $\{1, 2, \ldots, n\}$. Yn awr, trwy ddefnyddio (c) a (d), os yw $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ yn aildrefniant (trynewid) o $\{1, 2, \ldots, n\}$ gwelir fod

$$\Delta_n(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = \pm\Delta_n(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0,$$

ac felly mae

$$\Delta_n(r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_n}) = 0$$

fel sydd ei angen.

SYLWADAU

1. **Gelwir**

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \in K$$

yn coffactor o'r elfen α_{ij} yn A.

ENGHRAIFFT

Os yw $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, yna , er enghraifft

$$c_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Sylwer fod yr arwydd $(-1)^{i+j}$ yn cael ei roi gan y patrwm

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

2. **Trwy ddefnyddio ymresymiad tebyg i'r un uchod, gellir profi fod**

$$\begin{aligned} D_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n}^{n} \alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{nk_n} D_n(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \mathbf{sgn}\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{nk_n}, \end{aligned}$$

lle mae'r swm dros yr $n!$ o dermau a geir am bob aildrefniant posibl $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ o $\{1, 2, \ldots, n\}$ a sgn$\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = (-1)^p$, lle mae p yw'r nifer o drawsnewid rhesi sydd ei angen i gael y matrics I_n o'r matrics $(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n})$. Yn glasurol, dyma'r fformiwla a ddefnyddiwyd fel y

diffiniad o'r determinant o fatrics, ond fel y gwelwyd yn barod, hyd yn oed yn yr achos $n = 3$, gyda ond chwech term yn y diffiniad nid yw'n hawdd ei drin. Er y bydd y ffurf yma o ddefnydd yn arbennig mewn profion, yn ymarferol, y priodweddau (i), (ii) a (iii) yn Niffiniad D_n gyda nifer o ganlynebau a brofir yn y man fydd o'r defnydd mwyaf wrth gyfrifo determinantau.

3. **O'r diffiniad, os oes gan fatrics A golofn o seroau, yna mae $D_n(A) = 0$. Ymhellach, fe welir (gweler Ymarferiad 2.2, Rhif 9) fod yr un peth yn wir am res o seroau.**

Yn awr, dangosir fod y priodweddau a brofwyd ac a ddefnyddiwyd yn barod yn yr achosion $n = 2, 3$ yn parhau i fod yn wir a'i bod yn dilyn o'r priodweddau (i), (ii) a (iii) a ddefnyddiwyd i ddiffinio determinantau. Yn ychwanegol, gan fod y ffwythiant determinant D_n yn unigryw, fe'i dynodir o hyn allan gyda'r nodiant traddodiadol $\det$ a'i werth ar unrhyw fatrics A gan $\det A$ neu, weithiau gyda'r nodiant $|A|$ neu $|\alpha_{ij}|$ os yw hynny'n fwy hwylus yn y cyd-destun. Noder fod yr n yn $D_n(A)$ wedi ei hepgor, n yw maint y matrics ac felly dylai fod yn glir bethbynnag heb ei gynnwys.

Canlyneb 2.3 ***Am $j = 1, 2, \ldots, n-1$ os yw $B = (r_1, \ldots, r_{j+1}, r_j, \ldots, r_n)$ yn fatrics a geir o A trwy gyfnewid yr j-fed a'r $j+1$-fed rhesi, yna mae***

$$\det B = -\det A,$$

hynny yw, os cyfnewidir y ddwy res nesaf at eu gilydd, yna mae gwerth y determinant yn newid gyda ffactor o -1.

PRAWF Gwelir fod

$$\begin{aligned}
0 &= \det(r_1, r_2, \ldots, r_j + r_{j+1}, r_j + r_{j+1}, \ldots, r_n) \quad (\textbf{trwy ddefnyddio (ii)}) \\
&= \det(r_1, r_2, \ldots, r_j, r_j, \ldots, r_n) + \det(r_1, r_2, \ldots, r_j, r_{j+1}, \ldots, r_n) \\
&\quad + \det(r_1, r_2, \ldots, r_{j+1}, r_j, \ldots, r_n) + \det(r_1, r_2, \ldots, r_{j+1}, r_{j+1}, \ldots, r_n) \\
&\qquad (\textbf{trwy ddefnyddio (i) nifer o weithiau}) \\
&= 0 + \det A + \det B + 0 \ (\textbf{trwy ddefnyddio (ii)})
\end{aligned}$$

ac felly, ceir fod $\det B = -\det A$.

Canlyneb 2.4 ***Os yw dwy res mewn matrics A yn hafal, yna mae***

$$\det A = 0.$$

PRAWF Cymerer fod yr i-fed a'r j-fed rhes yn hafal, gyda $j > i$. Yna, os cyfnewidir y j-fed rhes gyda'r rhesi blaenorol iddi yn eu tro hyd at y mae nesaf at y i-fed rhes. Yna trwy'r Canlyneb 2.3, newidir gwerth y determinant gyda ffactor o -1 ar bob symudiad, ond erbyn hyn mae matrics gennym gyda dwy res nesaf at ei gilydd sy'n hafal, a thrwy Theorem 2.1 (ii), gwelir fod determinant y matrics hwn yn 0, ac felly ceir hefyd fod $\det A = 0$.

Canlyneb 2.5 ***Os yw $j \neq i$, yna mae***

$$\det(r_1, r_2, \ldots, r_i + \alpha r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) = \det(r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n),$$

hynny yw, os ychwanegir lluoswm sgalar o res i res arall, yna ni newidir gwerth y determinant.

PRAWF Gwelir fod

$$\begin{aligned}
&\det(r_1, r_2, \ldots, r_i + \alpha r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) = \\
&\qquad \det(r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) + \alpha \det(r_1, r_2, \ldots, r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \\
&\qquad\quad (\textbf{trwy ddefnyddio Theorem 2.1 (i)}) \\
&= \det(r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \ (\textbf{trwy ddefnyddio Canlyneb 2.4}).
\end{aligned}$$

Golyga unigrywiaeth y ffwythiant determinant y ceir yr un gwerth i $\det A$ **pa bynnag** j **fel bod** $1 \leq j \leq n$ **a ddewisir yn y diffiniad**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}.$$

Gelwir hyn yn ehangiad determinant A **yn nhermau y** j**-fed golofn o** A**.**

Yn yr un modd, am bob $1 \leq i \leq n$**, mae**

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}$$

yn rhoi ehangiad determinant A **yn nhermau y** i**-fed res o** A **(gweler y prawf ar dudalen ? i gyfiawnhau hyn). Felly, ehangir determinant yn nhermau y res neu'r golofn sy'n fwyaf addas fel a welir yn yr enghreifftiau sy'n dilyn.**

ENGHREIFFTIAU

1. Gwelir bod

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \textbf{trwy ddefnyddio Canlyneb 2.5} \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \textbf{trwy ehangu yn nhermau colofn } 1 \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -17 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & -17 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 45
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ 0 & x-x^2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & x-y & x-1 \\ 1-x^2 & 0 & y-x \\ x-x^2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= -(x-y)\begin{vmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x-x^2 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= -(x-y)(1-x)\begin{vmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(x-y)(1-x)\begin{vmatrix} 1 & y \\ x & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(x-y)(1-xy)
\end{aligned}$$

3. Gadawer i

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

yna profir fod

$$D_n = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

Mae'r prawf yn un anwythol ar n. Mae'r canlyniad yn glir pan mae $n = 2$, hynny yw

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1).$$

Os yw r_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ yn sefyll am yr i-fed res o D_n, yna trwy weithredu y gweithrediadau rhes elfennol $r_n \to r_n - x_1 r_{n-1}, r_{n-1} \to r_{n-1} - x_1 r_{n-2}, \dots,$ $r_2 \to r_2 - x_1 r_1$ yn eu tro, yna ceir fod

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)D_{n-1}.
\end{aligned}$$

Cwblheir y prawf yn awr trwy ddefnyddio anwythedd ar n. Gelwir D_n yn Determinant Vandermonde.

4. Gadawer i

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2D_{n-1} - D_{n-2}. \end{aligned}$$

Felly,

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots$$

ac felly gwelir fod

$$D_n - D_{n-1} = D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1.$$

Yn yr un modd, gwelir fod

$$\begin{aligned} D_{n-1} - D_{n-2} &= 1 \\ D_{n-1} - D_{n-2} &= 1 \\ &\vdots \\ D_3 - D_2 &= 1 \\ D_2 - D_1 &= 1 \end{aligned}$$

a thrwy adio'r cyfan, ceir fod

$$D_n = (n-1) + D_1 = n + 1.$$

Ymarferion 2.2

1. Enrhifwch y determinantau

$$\textbf{(i)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \textbf{(ii)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \textbf{(iii)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Am pa werthoedd o x mae'r determinant

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0?$$

3. Dangoswch fod y determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & b+a & 0 & b+c \\ 1 & c+a & c+b & 0 \end{vmatrix} = -4(ab+bc+ca)$$

ac felly darganfyddwch werthoedd y determinant pan mae

(i) a, b **ac** c **yn drydydd isradd gwahanol o** 1**,**

(ii) a, b **ac** c **yn bedwarydd isradd gwahanol o** 1**.**

4. Dangoswch fod y determinantau ganlynol gyda n **rhes**

(i) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^{n-1}$$

(ii) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\{(x-1)^{n-2} + x^{n-1}\}$$

(iii) $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$$

(iv) $$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b).$$

5. Os yw (α_{ij}) **yn fatrics** $n \times n$ **gyda** $\alpha_{11} \neq 0$ **ac hefyd** $\alpha_{ij} \neq 0$ **pan mae** $i + j > n + 1$**, gyda gweddill yr elfennau yn** 0**, darganfyddwch fynegiant i** $\det A$**.**

6. Gadawer i A_n sefyll am y matrics $n \times n$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dangosfwch fod $\det A_n = 0$ pan mae $n = 3k - 1$ a darganfyddwch $\det A_n$ pan mae $n = 3k$.

7. Gadawer i $D : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wireddu

$$D(A)D(B) = D(AB)$$

am bob $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dangoswch yntau fod $D(A) = 0$ am bob $A \in M_n(\mathbb{R})$ neu fod $D(I_n) = 1$. Yn yr achos yma, dangoswch fod $D(A) \neq 0$ os yw A yn wrthdro.

Os yw $n = 2$, cymerer ymhellach fod $D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Profwch fod y canlynol yn wir

(i) $D(0) = 0$,

(ii) $D(A) = 0$ os yw $A^2 = 0$,

(iii) bod $D(B) = -D(A)$ os ceir y matrics B o'r matrics A trwy gyfnewid rhesi (neu golofnau).

8. Os yw A yn fatrics gyda rhes o seroau, profwch fod $\det A = 0$.

9. Gadawer i A_n fod yn fatrics $n \times n$ gyda'r elfen-(i, j) $|i - j|$. Dangoswch fod

$$\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

2.3 Priodweddau Pellach o Ddeterminantau

Yn y rhan yma, profir bod y ffwythiant determinant yn luosol a diwythwn nifer o ganlyniadau pwysig i'r canlyniad hwn. Mae'r prawf yn ddibynnol ar y syniad o fatricsau elfennol a gyflwynwyd ym Mhennod 1. Yn gyntaf, profir y lemma ganlynol.

Lemma 2.6 ***Os yw E yn fatrics elfennol, yna mae***

(i) $\det E \neq 0$,

(ii) $\det E^t = \det E$,

(iii)** E^{-1} **yn fatrics elfennol.

PRAWF Mae'r prawf yn un achos-wrth-achos gan enrifo determinant y tri gwahanol fath o fatrics elfennol; gwelir fod

$$\det M_i(\alpha) = \det M_i(\alpha)^t = \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\det H_{ij} = \det H_{ij}^t = -1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\det A_{ij}(\alpha) = \det A_{ij}(\alpha)^t = 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

sy'n profi (i) a (ii). I brofi (iii), noder bod

$$M_i(\alpha)^{-1} = M_i(\alpha^{-1}), \;\; H_{ij}^{-1} = H_{ij}, \;\; A_{ij}(\alpha)^{-1} = \det A_{ji}(-\alpha) = 1.$$

Yn awr, profir y prif ganlyniad.

Theorem 2.7 ***Os yw** E **yn fatrics elfennol** $n \times n$**, yna mae***

$$\det EA = (\det E)(\det A)$$

am bob matrics** $n \times n$ A**.

PRAWF Mae'r prawf eto yn un achos-wrth-achos.

Mae cynluosi matrics A gyda $M_i(\alpha)$ yn gywerth â lluosi yr i-fed res o A gyda α, felly mae

$$\begin{aligned} \det(M_i(\alpha)A) &= \alpha \det A && \textbf{trwy Theorem 2.1(i)} \\ &= (\det M_i(\alpha))(\det A) && \textbf{trwy Lemma 2.6}. \end{aligned}$$

Yn yr un modd, mae cynluosi matrics A gyda H_{ij} yn gywerth â gyfnewid yr i-fed a'r j-fed resi o A, ac felly trwy ddefnyddio Canlyneb 2.3 nifer o weithiau ceir fod

$$\det(H_{ij}A) = -\det A = (\det H_{ij}(\det A).$$

Hefyd mae cynluosi matrics A gyda $A_{ij}(\alpha)$ yn gywerth â ac adio α gwerth yr j-fed res i'r i-fed res o A , ac felly trwy ddefnyddio Canlyneb 2.5 a Lemma 2.6 ceir fod

$$\det(A_{ij}(\alpha)A) = \det A = (\det(A_{ij}(\alpha))(\det A).$$

Daw y prif ganlyniadau a fydd o gryn ddefnydd yn y canlynebau canlynol.

Canlyneb 2.8 ***Mae matrics** A **yn anhynod os a dim ond os yw** $\det A \neq 0$**.***

PRAWF Os yw A yn anhynod, yna trwy Ganlyneb 1.24 gwelir y bodola matricsau elfennol $E_1, E_2, \ldots, E_r$ fel bod

$$E_1 E_2 \ldots E_r A = I_n.$$

Felly, trwy ddefnyddio y theorem uchod, gwelir fod

$$(\det E_1)(\det E_2) \ldots (\det E_r)(\det A) = \det I_n = 1$$

ac felly mae $\det A \neq 0$ **fel sydd ei angen.**

I'r gwrthwyneb, os yw A **yn fatrics hynod, yna trwy Theorem 1.22 gwelir y bodola matricsau elfennol** $E_1, E_2, \ldots, E_r$ **fel bod**

$$E_1 E_2 \ldots E_r A = R$$

lle mae R **yn fatrics echelon gostyngol** $n \times n$ **sy'n cynnwys rhes, ac felly colofn o seroau. Felly, mae** $\det R = 0$ **a gan fod, trwy Lemma 2.6 (i),** $\det E_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$**, mae'n dilyn fod** $\det A = 0$**.**

Canlyneb 2.9 ***Os yw*** A ***a*** B ***yn fatricsau*** $n \times n$***, yna mae***

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

PRAWF Os yw A **a** B **yn fatricsau anhynod, felly trwy Theorem 1.22 bodola fatricsau elfennol** $E_1, E_2, \ldots, E_r, E_1', E_2', \ldots, E_s'$ **fel bod**

$$A = E_1 E_2 \ldots E_r, \quad B = E_1', E_2' \ldots E_s'.$$

Felly, trwy ddefnyddio Theorem 2.7 drosodd a throsodd, ceir fod

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1 E_2 \ldots E_r E_1' E_2' \ldots E_s') \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_r)\det(E_1')\det(E_2')\ldots\det(E_s') \\
&= (\det A)(\det B).
\end{aligned}$$

Os yw A **yn fatrics hynod, yna trwy Ganlyneb 2.8, mae** $\det A = 0$ **a thrwy Theorem ?, bodola matricsau elfennol** $E_1, E_2, \ldots, E_r$ **fel bod**

$$A = E_1 E_2 \ldots E_r R$$

lle mae R **yn cynnwys rhes o seroau. Yna ceir fod**

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_r)\det(RB) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gan fod RB **hefyd yn cynnwys rhes o seroau. Felly, unwaith yn rhagor, mae**

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)(= 0).$$

Gellir trafod yr achos lle mae B **yn hynod gyda dadl gyffelyb.**

Gwelir yn y ganlyneb nesaf pa mor ddefnyddiol yw determinantau wrth ystyried y broblem o ddatrys hafaliadau llinol.

Canlyneb 2.10 ***Mae gan y system homogenaidd o*** n ***o hafaliadau llinol mewn*** n ***newidyn***

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ddatrysiad distadl os a dim ond os yw $\det A = 0$***, lle mae*** $A = (\alpha_{ij})$***.***

PRAWF Mae'r prawf yn dilyn ar ei union o Ganlyneb 2.8 a Chanlyneb 1.24.

Canlyneb 2.11 *Os yw $A \in M_n(K)$, yna mae*

$$\det A^t = \det A.$$

PRAWF Os yw A yn anhynod, yna trwy Ganlyneb 1.24, ceir fod

$$A = E_1 E_2 \dots E_r,$$

lle mae $E_1, E_2, \dots, E_r$ yn fatricsau elfennol. Yna trwy ddefnyddio Lemma 2.6 a Theorem 2.7 gwelir fod

$$\begin{aligned} \det A^t &= \det(E_r^t)\det(E_{r-1}^t)\dots\det(E_1^t) \\ &= \det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_r) \\ &= \det A \end{aligned}$$

Os yw A yn hynod, yna trwy Ganlyneb 2.8, mae $\det A = 0$ ac mae

$$A = E_1 E_2 \dots E_r R$$

lle mae $E_1, E_2, \dots, E_r$ yn fatricsau elfennol ac R yw matrics echelon gostyngol A. Gan fod gan R^t res a cholofn o seroau, mae'n dilyn fod $\det R^t = 0$, ac felly ceir fod

$$\det A^t = 0,$$

hynny yw,

$$\det A^t = \det A (= 0)$$

yn yr achos yma hefyd.

Mae'r ganlyneb olaf yma yn arbennig o bwysig gan ei bod yn profi, fel rhagwelwyd ym Mhennod 1, fod y priodweddau a ddefnyddiwyd i ddiffinio determinantau yn nhermau rhesi yr un mor wir yn nhermau colofnau y matrics A, hynny yw

(i) mae $\det A$ yn linol ar golofnau A,

(ii) os yw dwy golofn nesaf at ei gilydd o A yn hafal, yna mae $\det A = 0$.

Yn ychwanegol, gellir mynegi Canlynebau 2.2,2.3 a 2.4 hefyd yn nhermau colofnau A ac hefyd

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij} = \det A \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mynegwyd hyn yn barod ar ddiwedd §2.2. Wrth gwrs, gellid fod wedi profi y canlyniadau hyn i gyd yn uniongyrchol trwy addasu y profion uchod.

Ymarferion 2.3

1. Penderfynwch pa rai o'r matricsau canlynol sy'n anhynod

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Os yw $s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$ trwy arddangos y determinant fel lluoswm o ddau determinant, dangoswch fod

$$\begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2.$$

Enrhifwch y determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_5 \end{vmatrix}.$$

3. Os yw $s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$ dangoswch fod

$$\begin{vmatrix} s_r & s_{r+1} & s_{r+2} \\ s_{r+1} & s_{r+2} & s_{r+3} \\ s_{r+2} & s_{r+3} & s_{r+4} \end{vmatrix} = \alpha^r\beta^r\gamma^r(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2.$$

Os yw α, β, γ yn wreiddiau o $x^3 + bx + c$ enrhifwch y mynegiad hwn yn nhermau b a c.

4. Profwch fod lluoswm y matricsau

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & c_1 + id_1 \\ -(c_1 - id_1) & a_1 - ib_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 & c_2 + id_2 \\ -(c_2 - id_2) & a_2 - ib_2 \end{pmatrix}$$

yn fatrics arall o'r un ffurf, lle mae $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$. Trwy enrifo determinantau y matricsau, profwch fod lluoswm y sum o sgwariau o bedwar integryn gyda swm o sgwariau o bedwar integryn yn swm o sgwariau pedwar integryn.

5. Gadawer i A fod y matrics

$$\begin{pmatrix} a + bx + cx^2 & a + by + cy^2 & a + bz + cz^2 \\ c + ax + bx^2 & c + ay + by^2 & c + az + bz^2 \\ b + cx + ax^2 & b + cy + ay^2 & b + cz + az^2 \end{pmatrix}$$

a gadawer i B fod y matrics

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Darganfyddwch matrics C fel bod $A = CB$. Dangoswch fod determinant A yn hafal i

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ ax^2+cy^2+bz^2 & bx^2+ay^2+cz^2 & cx^2+by^2+az^2 \end{vmatrix}.$$

6. Penderfynwch os oes gan y systemau o hafaliadau homogenaidd llinol ddatrysiadau distadl

(i) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$ **(ii)** $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

7. Dangoswch, os yw $k \neq 1$, mae datrysiad i'r system o hafaliadau

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 6 \\ x & - & 2y & + & z & = & p \\ x & + & ky & - & 2z & = & p^2 \end{array}$$

beth bynnag yw gwerth p ac am werth safadwy o p mae'r datrysiad yn unigryw. Darganfyddwch y datrysiad pan mae $k = 2, p = 1$. Dangoswch os yw $k = 1$, yna mae gan y system ddatrysiadau am ddau werth yn unig o p; darganfyddwch y gwerthoedd hyn a datryswch y systemau yn gyffredinol yn y ddau achos.

8. Am pa werthoedd o k mae gan y system o hafaliadau llinol a ganlyn (i) dim datrysiad (ii) datrysiad unigryw (iii) mwy nag un datrysiad?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (k+2)y & + & 2z & = & 2 \\ (k^2+1)x & + & 2(k+2)y & + & 4z & = & 4k \\ 3x & + & 9y & + & 3(k+1)z & = & 6k \end{array}.$$

9. Datryswch Ymarferion 1.3, Rhifau 3-7, gyda'r dulliau sydd ar gael erbyn hyn.

2.4 Gwrthdro Matrics

Ym Mhennod 1 cyflwynwyd method i ddarganfod gwrthdro matrics. Yn awr cyflwynir method arall sy'n ddibynnol ar ddeterminantau ond nad yw mor effeithiol wrth ddatrys problemau ymarferol. Ond, gwelir mai ei gryfder yw ei natur damcaniaethol sy'n ddefnyddiol pan mae angen ffurf hollol esblyg i'r datrysiad.

Trwy ddiffiniad determinantau, am bob $j = 1, 2, \ldots, n$, gwelir fod

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij} = \det A.$$

Ymhellach, os yw $k \neq j$, gwelir fod

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

gan fod dwy golofn yn hafal. Trwy gyfuno y ddau ganlyniad yma, ceir fod

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ik} = \delta_{jk} \det A.$$

Diffiniad 2.12 ***Os yw*** $A \in M_n(K)$***, yna yr*** **atgyd** ***o*** A***, a ddynodir gan adj*** A***, yw'r matrics*** $n \times n$

$$\textbf{\textit{adj}}\, A = (c_{ij})^t,$$

lle mae c_{ij} ***yw coffactor yr elfen-***(i, j) ***o*** A***, hynny yw, y matrics*** $n \times n$ ***a geir trwy roi*** c_{ji} ***yn y safle-***(i, j)***.***

Felly, gellir ail gyflwyno yr hafaliad uchod fel

$$\begin{aligned} (\textbf{adj } A)A &= (c_{ji})(\alpha_{ij}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} \alpha_{kj} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{pmatrix} \\ &= (\det A) I_n. \end{aligned}$$

Felly, os yw $\det A \neq 0$, yna mae

$$\frac{\textbf{adj } A}{\det A} A = I_n.$$

Yn yr un modd, gellir profi fod

$$A(\textbf{adj } A) = (\det A) I_n.$$

Felly, gwelir fod

$$\frac{\textbf{adj } A}{\det A} A = I_n = A \frac{\textbf{adj } A}{\det A}$$

a gan fod y gwrthdro o fatrics yn unigryw, gweler Lemma 1.16, ceir ffurf esblyg o'r matrics gwrthdro A^{-1} i A, sef

$$A^{-1} = \frac{\textbf{adj } A}{\det A}.$$

ENGHRAIFFT

Gadawer i $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **yna mae** $\det A = 4$ **ac mae**

$$\textbf{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

sy'n arwain felly i

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fel dywedwyd yn barod, ddim dyma'r method mwyaf effeithiol o enrhifo'r gwrthdro o fatrics $n \times n$ gan ei fod yn golygu enrhifo un determinant $n \times n$ ac n^2 determinant $(n-1) \times (n-1)$.

Ond, er enghraifft, gellir defnyddio hwn i roi datrysiad esblyg i system o hafaliadau llinol. Os ystyrir y system o n hafaliad llinol mewn n newidyn

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

neu mewn nodiant matrics

$$AX = b$$

lle mae

$$A = (\alpha_{ij}), \;\; X^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; b^t = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Yna, os yw A yn wrthdro, mae

$$X = A^{-1} b = \frac{\textbf{adj } A}{\det A} b$$

neu am $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A_{ji} \beta_j \\ &= \frac{\det A_j}{\det A}. \end{aligned}$$

lle mae A_j yw'r matrics a geir trwy ddisodli y j-fed golofn o A gan y golofn b, hynny yw,

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \beta_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \beta_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \beta_n & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Gelwir hwn yn Ddatrysiad-Cramer o hafaliadau llinol.

ENGHRAIFFT Datryswch

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

Trwy ddefnyddio y gwrthdro o'r matrics A yn yr enghraifft flaenorol, ceir fod

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

neu, fel arall, trwy ddefnyddio Ddatrysiad-Cramer ceir

$$x = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{7}{4}, y = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{7}{4}, z = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Ymarferion 2.4

1. **Defnyddiwch y dulliau a gyflwynwyd yn y rhan yma i ddarganfod gwrthdroadau y matricsau canlynol.**

   (i) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

2. **Defnyddiwch ddull Cramer i ddatrys y systemau o hafaliadau llinol canlynol**

   (i) $\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$ **(ii)** $\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 4 \\ x & + & 7y & - & 2z & = & 1 \\ 5x & - & 11y & + & 2z & = & -2 \end{array}$

3. **Am pa werthoedd o t bydd y matrics canlynol yn an-wrthdro?**

   Am werthoedd eraill o t, beth yw'r gwrthdro?

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Os yw A yn fatrics $n \times n$, profwch fod

$$\det(\mathbf{adj}\ A) = (\det A)^{n-1}$$

5. Darganfyddwch atgyd o'r matrics A, lle mae

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & -2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$$

Os yw

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

am pa werthoedd cymhlyg o x mae'r lluoswm o adj A a B yn an-wrthdro?

Chapter 3

Gofodau Fector

Yn y bennod hon, ac yng nghweddill y llyfr, defnyddir y nodiant canlynol:
saif K am faes mympwyol
saif $\mathbb{R}$ am y maes o rifau real
saif $\mathbb{C}$ am y maes o rifau cymhlyg
saif $\mathbb{Q}$ am y maes o rifau cymarebol

3.1 Cyflwyniad

Mewn cysylltiadau ffisegol, diffinnir fector yn aml fel "mesuryn ffisegol sydd gan faint a chyfeiriad". Gan y bydd y bennod hon yn canolbwyntio ar gyffredinoli y cysyniad o fector, yn gyntaf ceisir dadansoddi yn fwy manwl beth a olygir gan fector yn y plân ac yn y gofod.

Ystyrir yn gyntaf yr achos o'r plân. Gyda pwynt yn y plân golygir pâr o rifau real wedi eu trefnu (a, b), hynny yw, cynrychiolir pwynt gan gyfesurynnau a a b mewn perthynas â system cyfesuryn petryalog. Y tardd O yw'r pwynt $(0, 0)$. Y segment linol gyfeiriol o'r pwynt P i'r pwynt Q, a ddynodir gan $\vec{PQ}$, yw'r llinell gyda'r pwynt gwreiddiol P a'r pwynt diweddol Q, felly, pâr o bwyntiau wedi eu trefnu yw segment linol gyfeiriol. (gweler Ffigwr 1)

Os yw $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2), R = (r_1, r_2), S = (s_1, s_2)$ yn bedwar pwynt yn y plân, yna dywedir fod y ddau segment linol gyfeiriol $\vec{PQ}$ a $\vec{RS}$ yn gywerth os yw

$$(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (s_1 - r_1, s_2 - r_2).$$

Gwelir yn hawdd fod hon yn berthynas gywerth ar y set o segmentau linol gyfeiriol yn y plân, mae'n amlwg ei bod yn ymatblyg a gymesur ac os yw $\vec{RS}$ yn gywerth a $\vec{TU}$, lle mae $T = (t_1, t_2)$ a $U = (u_1, u_2)$ yn ddau bwynt arall yn y plân, yna mae

$$(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (s_1 - r_1, s_2 - r_2) = (u_1 - t_1, u_2 - t_2)$$

ac felly mae'r berthynas yn drosaidd hefyd.

Yn awr, mae'n amlwg fod pob segment linol gyfeiriol yn gywerth â segment linol gyfeiriol unigryw gyda'r pwynt gwreiddiol O, hynny yw, os yw

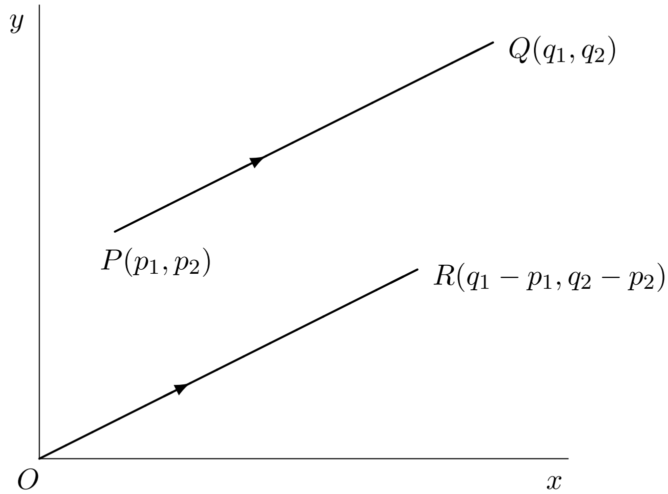


Figure 3.1:

$P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$, **yna mae** $\vec{PQ}$ **yn gywerth â'r segment linol gyfeiriol** $\vec{OR}$, **lle mae**
$R = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. **Felly, gall pob dosbarth gywerth o segmentau linol gyfeiriol gael ei gynrychioli gan segment linol gyfeiriol gyda'r pwynt gwreiddiol y pwynt tardd** O. **Felly, diffinir fector** $\vec{OP}$ **yn y plân fel segment linol gyfeiriol gyda'r pwynt gwreiddiol** O **a'r pwynt diweddol** P. **Penderfynnir fector yn llwyr gan gyfesurennau ei bwynt diweddol, felly dynodir y fector** $\vec{OP}$ **gan** (p_1, p_2), **sef cyfuserennau y pwynt** P.

Gadawer i $V_2(\mathbb{R})$ **ddynodi y set o fectorau yn y plân, hynny yw**

$$V_2(\mathbb{R}) = \{(p_1, p_2) \mid p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Mae rheol wybyddus, a elwir y rheol paralelogram i adio neu gyfuno fectorau, gweler Ffigwr 3.2). Os yw $\vec{OP}$ **a** $\vec{OQ}$ **yn fectorau, ffurfir fector** $\vec{OR}$ **yn cyfateb i'r ddau fector hwn fel a ganlyn: Gadawer i** $\vec{QR}$ **fod y segment gyfeiriol linol gyda'r pwynt gwreiddiol** Q **sy'n gywerth â** $\vec{OP}$, **hynny yw, mae** QR **yn paralel ag** OP **a gyda'r un hyd. Yn yr un modd, mae** $\vec{PR}$ **yn segment gyfeiriol linol sy'n gywerth a** $\vec{OQ}$. **Felly,** $\vec{OR}$ **yw'r swm o** $\vec{OP}$ **ac** $\vec{OQ}$, **hynny yw**

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$$

neu

$$(p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2) \tag{3.1.1}$$

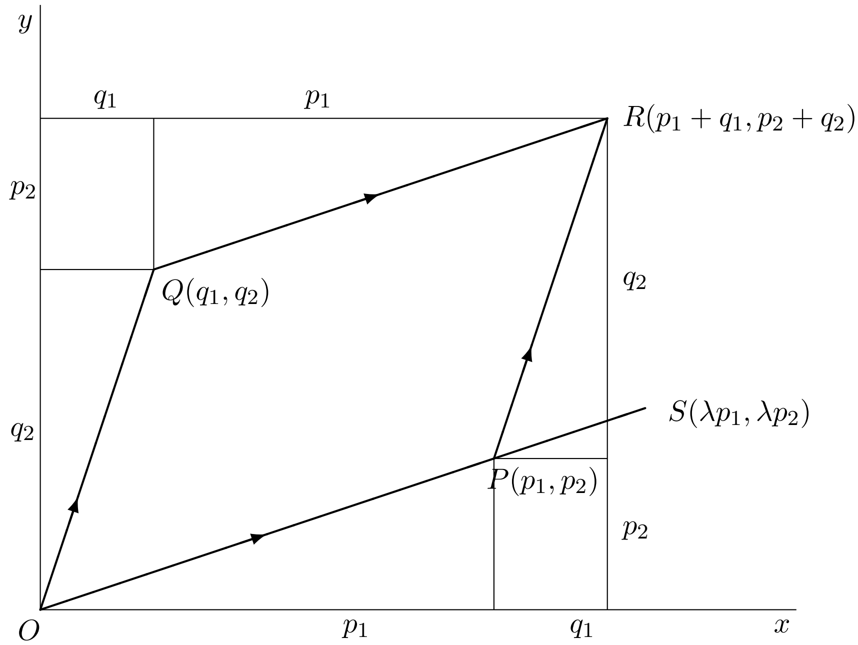


Figure 3.2:

Hefyd, gellir trafod lluosi fector $\vec{OP}$ gan rif real λ yn yr un modd, $\lambda\vec{OP}$ yw'r fector $\vec{OS}$ o hyd $|\lambda|OP$ yn yr un cyfeiriad a $\vec{OP}$ os yw λ yn bositif ond yn y cyfeiriad gwrthgyferbyniol os yw λ yn negatif; mae hyn yn rhoi

$$\lambda(p_1,p_2) \quad = \quad (\lambda p_1,\lambda p_2). \tag{3.1.2}$$

Felly, ar $V_2(\mathbb{R})$ diffinnir adio fectorau gan (3.1.1) a lluosi sgalar gydag elfennau o $\mathbb{R}$ gan (3.1.2).

Gellir diffinio segmentau llinol cyfeiriol a fectorau yn y gofod (neu ofod-3) mewn modd cyffelyb. Os dynoda $V_3(\mathbb{R})$ y set o fectorau yng ngofod-3, sef

$$V_3(\mathbb{R}) = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\},$$

yna trwy ystyriaethau geometraidd cyffelyb i'r uchod arweinir i'r diffiniadau canlynol o adio elfennau o $V_3(\mathbb{R})$ a lluosi sgalar elfennau o $V_3(\mathbb{R})$ gan sgalarau o $\mathbb{R}$, hynny yw,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \quad = \quad (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3)$$

a

$$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \quad = \quad (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3).$$

Trwy'r ddatblygu'r patrwm sy'n amlwg yn awr, gellir ymestyn y diffiniad i $V_n(\mathbb{R})$ lle mae $n > 4$, heblaw nid oes yn yr achosion o werthoedd uwch am

n **ddehongliad geometraidd mor amlwg i'r cysyniad o 'fector'. Ond fe welir ymhellach ymlaen yn y bennod hon a'r llyfr y bydd y cyffredinoli hwn o gryn ddefnydd ymarferol. Yn wir, nid oes angen ychwaith i gyfyngu'r gwaith i'r maes o rifau real yn unig. Gellir yr un mor hawdd trafod y maes cyffredinol** K**. Felly, cyflwynir y diffiniad canlynol.**

Diffiniad 3.1 ***Os yw*** K ***yn faes mympwyol, yna gadawer i***

$$V_n(K) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

Diffinnir **adio** ***elfennau*** $V_n(K)$ ***trwy osod***

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

a **lluosi sgalar** ***elfennau o*** $V_n(K)$ ***gan elfennau o*** K ***gan***

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n)$$

lle mae $\alpha, \alpha_i, \beta_i \in K$***.***

Yn awr bod y diffiniadau yma wedi eu gwneud, gellir dangos fod adio a lluosi sgalar yn bodloni'r nifer helaeth o reolau algebra. Golyga hyn y gellir trafod fectorau yn hollol rwydd heb gyfyngiadau. Cyflëir hyn yn y theorem sy'n dilyn.

Theorem 3.2 ***Os yw*** $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), v = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), w = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ ***yn elfennau o*** $V_n(K)$ ***ac*** α, β ***yn elfennau o*** K ***yna mae***

(i) $u + v \in V_n(K)$***,***

(ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$***,***

(iii) $u + v = v + u$***,***

(iv) ***bodola elfen*** $0 \in V_n(K)$ ***fel bod*** $u + 0 = u$ ***am bob*** $u \in V_n(K)$***,***

(v) ***am bob*** $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in V_n(K)$ ***bodola elfen*** $-u = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) \in V_n(K)$ ***fel bod*** $u + (-u) = 0$***,***

(vi) $\alpha u \in V_n(K)$***,***

(vii) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$***,***

(viii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$***,***

(ix) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$***,***

(x) $1u = u$.

PRAWF Mae'r prawf yn un elfennol; profir rhai o'r datganiadau yn unig i arddangos natur y prawf. Gellir profi y gweddill yn yr un modd. Er enghraifft, profir (ii) fel â ganlyn

$$\begin{aligned} u+(v+w) &= (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+((\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)+(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)) \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(\beta_1+\gamma_1,\beta_2+\gamma_2,\dots,\beta_n+\gamma_n) \\ &= (\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1),\alpha_2+(\beta_2+\gamma_2),\dots,\alpha_n+(\beta_n+\gamma_n)) \\ &= ((\alpha_1+\beta_1)+\gamma_1,(\alpha_2+\beta_2)+\gamma_2,\dots,\alpha_n+\beta_n+\gamma_n) \\ &= (u+v)+w. \end{aligned}$$

Yr $0 \in V_n(K)$ **sydd ei angen yn (iv) yw'r** n**-twpl** $(0,0,\dots,0)$ **ac yn (v), mae**

$$\begin{aligned} (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(-\alpha_1,-\alpha_2,\dots,-\alpha_n) &= (\alpha_1+(-\alpha_1),\alpha_2+(-\alpha_2),\dots,\alpha_n+(-\alpha_n)) \\ &= (0,0,\dots,0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ni ddatblygir yr ystyriaeth o $V_n(K)$ **ymhellach yn awr. Yn hytrach, yn union fel y defnyddiwyd** $V_2(\mathbb{R})$ **a** $V_3(\mathbb{R})$ **i gymhellu y diffiniad o** $V_n(K)$**, yn awr defnyddir (i) - (x) o Theorem 3.2 i gymhellu y diffiniad o strwythur haniaethol llawer mwy cyffredinol a elwir yn ofod fector. Gwelir mai enghraifft yn unig o ofod fector yw** $V_n(K)$**, er gwelir yn y man ei fod yn enghraifft nodweddiadol iawn o ofod fector.**

3.2 Diffiniad ac Engreifftiau o Ofodau Fector

Diffiniad 3.3 ***Gelwir set*** V ***yn*** **ofod fector dros y maes** K ***neu yn*** **ofod-**K ***os***

(a) ***(i)*** ***mae*** V ***yn gaeedig mewn perthynas â gweithrediad deuol a elwir yn*** **adio** $(+)$***, hynny yw, os yw*** $u, v \in V$ ***yna mae*** $u+v \in V$***,***

(ii) ***(deddf gymudol)*** $u+v=v+u$ ***am bob*** $u, v \in V$***,***

(iii) ***(deddf gysylltiadol)*** $u+(v+w)=(u+v)+w$ ***am bob*** $u, v, w \in V$

(iv) ***bodola elfen*** $0 \in V$***, a elwir yn elfen sero, fel bod*** $v+0=0+v=v$ ***am bob*** $u \in V$***,***

(v) ***am bob*** $v \in V$ ***bodola elfen*** $-v \in V$ ***fel bod*** $v+(-v)=0=(-v)+v$***,***

(b) ***(i)*** ***am bob*** $\alpha \in K$***,***$v \in V$***, diffinir elfen*** αv***, a elwir yn*** **luoswm sgalar o** v **gyda** α ***ac mae*** $\alpha v \in V$***,***

(ii) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$***, am bob*** $\alpha, \beta \in K$***,*** $v \in V$***,***

(iii) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$***, am bob*** $\alpha \in K$***,*** $u, v \in V$***,***

(iv) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$***, am bob*** $\alpha\beta \in K$***,*** $v \in V$***,***

(v) $1v = v$***, am bob*** $v \in V$***.***

ENGHREIFFTIAU

1. Dangoswyd fod

$$V_n(K) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$$

yn ofod-K yn y rhan blaenorol.

2. Gadawer i $P(K)$ fod y set sy'n cynnwys pob polynomial o unrhyw radd yn yr amhenderfadun x gyda cyfernodau yn y maes K, hynny yw,

$$P(K) = \{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_m x^m | 0 \geq m < \infty, \alpha_m \neq 0, \alpha_i \in K\ (i = 1, 2, \ldots, m)\},$$

$+$ yw'r adio arferol o bolynomialau ac os yw $\alpha \in K$, yna diffinnir lluosi sgalar gan elfen α o K gan

$$\alpha(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m) = \alpha\alpha_0 + \alpha\alpha_1 x + \alpha\alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha\alpha_m x^m.$$

Yna mae $P(K)$ yn ofod-K. I brofi hyn rhaid gwiro pob un o'r acsiomau yn Niffiniad 3.3. Ar y cyfan mae'r prawf yn syml, fel er enghraifft yn achos Diffiniad 3.3 (a) (ii). os yw $f(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_m x^m$ a $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n$, gan gymeryd, heb golli cyffredinolrwydd fod $m \geq n$. Yna gellid ystyried fod $g(x) = \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\cdots+\beta_n x^n+\cdots+\beta_m x^m$, lle mae $\beta_{n+1} = \cdots = \beta_m = 0$. Yna mae

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_2 + \beta_2)x^2 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m)x^m \\ &= (\beta_0 + \alpha_0) + (\beta_1 + \alpha_1)x + (\beta_2 + \alpha_2)x^2 + \cdots + (\beta_m + \alpha_m)x^m \\ &= g(x) + f(x). \end{aligned}$$

Fel yr awgrymwyd uchod, defnyddir yr union yr un fath o ymresymiad gyda'r gweddill o'r acsiomau.

3. Gadawer i $P_n(K)$ fod y set sy'n cynnwys pob polinomial o radd dim mwy nag n yn yr amhenderfadun x gyda cyfernodau yn y maes K, hynny yw,

$$P_n(K) = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in K\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

Diffinnir adio $(+)$ a lluosi sgalar gan elfen α o K fel yn Enghraifft 2. Yna, gyda ymresymiad tebyg gellir profi fod $P_n(K)$ yn ofod-K.

4. **Gadawer i X fod yn set mympwyol a K yn faes mympwyol. Gadawer i**

$$K^X = \{f : X \to K\}$$

fod y set o bob mapiad (ffwythiant) o X i K. Os yw $f, g \in K^X$, $\alpha \in K$, yna diffinir adio a lluosi sgalar gan elfennau o K gan

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \qquad \textbf{am bob } x \in X \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) \qquad\qquad \textbf{am bob } x \in X \end{aligned}$$

Eto, mae'n syml i brofi fod K^X yn ofod-K.

Yn yr enghraifft nesaf cyflwynir nifer o achosion arbennig ond pwysig o'r enghraifft hon.

5. **(i) Os yw $X = K = \mathbb{R}$, yna $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ yw'r ofod-$\mathbb{R}$ o ffwythianau gwerth real a ddiffinnir ar $\mathbb{R}$.**

   (ii) Ox X yw'r cyfwng caëedig $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ lle mae a a b yn rifau real a $K = \mathbb{R}$, yna $\mathbb{R}^{[a,b]}$ yw'r ofod-$\mathbb{R}$ o ffwythianau gwerth real a ddiffynwyd ar y cyfwng caëedig $[a, b]$.

   (iii) Os yw $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a $K = \mathbb{R}$, yna $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ yw'r ofod-$\mathbb{R}$ o ddilyniannau $\{\alpha_n\}$ (gweler Ymarfer 3.3, Rhif 6 isod am eglurhad pellach o hyn).

6. **Mae'r maes o rifau cymhlyg $\mathbb{C}$ yn ofod-$\mathbb{R}$ gan fod $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = V_2(\mathbb{R})$.**

7. **Mae pob maes K yn ofod-K. Lluosi sgalar gan elfennau o K yw'r lluosi arferol o mewn i K. Felly mae'r acsiomau am ofod-K yn cael eu bodlonni o achos mai dyna yn union a ddywedir yn yr acsiomau am faes.**

   Felly, yn arbennig, mae $\mathbb{C}$ yn ofod-$\mathbb{C}$, gan ddangos y gall yr un set fod yn ofod fector dros wahanol feysydd - yn Enghraifft 6 gwelwyd fod $\mathbb{C}$ yn ofod-$\mathbb{R}$.

8. **Gadawer i $M_{m,n}(K)$ sefyll am y set o fatricsau $m \times n$ dros y maes K. Diffinwyd adio matricsau a lluosi sgalar o fatricsau gan elfennau o K ym Mhennod 1, Rhan 1.4 lle hefyd yn Theorem 1.14 gwelwyd fod y rhan helaethaf o'r acsiomau am ofod fector yn gael eu bodlonni. Gellir gwirio y gweddill o'r acsiomau yn weddol hawdd. Felly, mae $M_{m,n}(K)$ yn ofod-K. Dynodir y gofod-K o fatricsau $n \times n$ dros K gan $M_n(K)$.**

Daeth yr enghreifftiau uchod o ofodau fector o nifer o wahanol feysydd o fewn i fathemateg, sef geometreg, algebra ac analyteg sy'n arddangos fod y theori o ofodau fector yn un eang iawn o fewn i fathemateg ac hefyd yn eang ei gymwysiadau. Yn wir, beth sy'n digwydd yw bod nifer o ganlyniadau a oedd ar un amser yn cael eu profi ar wahan yn y gwahanol feysydd yn

cael eu profi o tan yr un tô. O hyn allan bydd y nodiant a sefydlwyd yn yr engreifftiau uchod, $V_n(K)$, $P(K)$, $P_n(K)$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{[a,b]}$, $M_{m,n}(K)$, $M_n(K)$, yn cael ei ddefnyddio yng nghweddill y llyfr heb eglurhad pellach.

Profir yn awr rhai canlyniadau syml o'r diffiniad o ofod fector.

Theorem 3.4 ***Gadawer i V fod yn ofod-K. Yna***

(a) mae'r elfen 0 a ddiffinwyd yn 3.3(a)(iv) yn unigryw,

(b) os yw $v \in V$, yna mae'r $-v$ a ddiffinwyd yn 3.3(a)(v) yn unigryw,

(c) os yw $u, v, w \in V$ ac $u + v = u + w$ yna mae $v = w$,

(d) os yw $u, v \in V$, yna mae gan $u + x = v$ ddatrysiad unigryw $v - u$ yn V,

(e) mae $-(-v) = v$ am bob $v \in V$,

(f) mae $0v = 0$ am bob $v \in V$,

(g) mae $-(\alpha v) = (-\alpha)v = \alpha(-v)$ a $(-\alpha)(-v) = \alpha v$ am bob $\alpha \in K, v \in V$.

PRAWF (a) Gadawer i $0'$ fod yn elfen sero arall, yna mae

$$v + 0' = v = 0' + v \quad \text{am bob } v \in V.$$

Felly, yn arbennig, gan fod $0 \in V$, mae

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

gan fod $v + 0 = v$ am bob $v \in V$, hynny yw, mae $0 = 0'$.

(b) Gadawer i v' hefyd i fod yn wrthdro adiol i v, yna mae

$$v + v' = v' + v = 0$$

ac

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

Felly, mae

$$v' = v' + 0 = v' + (v + (-v)) = (v' + v) + (-v) = 0 + (-v) = -v,$$

hynny yw $v' = -v$.

(c) Os yw $u + v = u + w$, yna mae

$$(-u) + (u + v) = (-u) + (u + w)$$

neu

$$((-u) + u) + v = ((-u) + u) = w$$

neu

$$0 + v = 0 + w$$

sy'n rhoi $v = w$.

(d) Gan fod $u + ((-u) + v) = (u + (-u)) + v = 0 + v = v$, mae gan $u + x = v$ o leiaf un datrysiad sef, $x = v - u$. Mae'r datrysiad yma yn unigryw, o achos os yw x a x' yn ddau ddatrysiad gwahanol, yna mae $u + x = u + x'$ a thrwy ddefnyddio (c) ceir fod $x = x'$.

(e) Os yw $v \in V$, yna mae $(-v)+(-(-v)) = 0 = (-v)+v$, felly trwy ddefnyddio (c) ceir fod $-(-v) = v$.

(f) Os yw $v \in V$, yna mae $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$; ond mae $0v = 0 + 0v$ a thrwy ddefnyddio (a) ceir fod $0 = 0v$.

(g) Os yw $\alpha \in K$, $v \in V$, yna mae $(\alpha v) + (-(\alpha v)) = 0$ ac mae $v + (-(v)) = 0$ yn golygu fod $\alpha v + \alpha(-v) = \alpha 0 = 0$ a trwy ddefnyddio (b) ceir fod $\alpha(-v) = -(\alpha v)$. Hefyd, mae $\alpha + (-\alpha) = 0$ yn golygu fod $(\alpha + (-\alpha))v = 0v = 0$ trwy ddefnyddio (f). Felly, mae $\alpha v + (-\alpha)v = 0 = \alpha v + (-(\alpha v))$ sy'n arwain i $(-\alpha)(v) = -(\alpha v)$. Yn derfynol, $(-\alpha)(-v) = \alpha(-(-v)) = \alpha v$ gan ddefnyddio (e).

Nodyn Dylai'r darllenydd benderfynu yn union pa rai o'r acsiomau sy'n diffinio gofodau fector a ddefnyddir ymhob cam yn y prawf yma.

3.3 Isofodau

Gadawer i V fod yn ofod-K.

Diffiniad 3.5 *Gelwir is-set W o V yn* isofod *o V os yw W ei hun hefyd yn ofod fector gyda'r un diffiniad o adio fectorau a lluosi sgalar sy'n V.*

Ar yr olwg gyntaf felly, er mwyn profi fod is-set W o ofod fector V yn isofod rhaid profi fod pob un o'r acsiomau yn niffiniad o ofod fector yn cael eu bodlonni. Ond gwelir fod y sefyllfa yn llawer symlach na hynny. Canys, o edrych yn fanwl ar yr acsiomau, gwelir fod nifer ohonynt yn wir yn awtomatig am fod W yn is-set o V. Yr acsiomau yma yw'r rhai yn Niffiniad 3.3 (a) (ii) a (iii) ac hefyd (b) (ii), (iii), (iv) a (v). Felly, i wirio fod is-set W o V yn isofod, y cyfan sydd ei angen yw gwirio y canlynol

(i) os yw $u, v \in W$, yna mae $u + v \in W$,

(ii) os 0 yw sero V, yna mae $0 \in W$,

(iii) am bob $v \in V$ mae $-v \in V$,

(iv) os yw $\alpha \in K$, $v \in V$ yna mae $\alpha v \in V$.

Ond yn wir, gellir gwella ar hyn hefyd trwy brofi y lemma ganlynol.

Lemma 3.6 *Mae is-set anwag W o ofod-K V yn isofodau os a dim ond os yw $\alpha u + v \in W$ am bob $\alpha \in K$ a $u, v \in W$.*

PRAWF Os yw W yn isofod o V, yna trwy'r diffiniad, os yw $\alpha \in K$, $u, v \in W$, yna mae $\alpha u \in V$ ac felly $\alpha u + v \in W$. I'r gwrthwyneb, gan fod W yn anwag bodola rhyw elfen $u \in W$ ac felly, mae $(-1)u + u = -u + u = 0 \in W$. Felly, os yw $\alpha \in K$, $v \in W$ ceir fod $\alpha v + 0 = \alpha v \in W$. Yn arbennig felly, mae $(-1)v = -v \in W$.

Yn derfynol, os yw $u, v \in W$, yna mae $(1)u + v = u + v \in W$. Profwyd felly, bod (i)-(iv) uchod wedi ei gwirio ac mae W yn isofod o V.

Mae gan bob gofod vector V o leiaf ddau isofod, sef $\{0\}$, sef yr isofod sy'n cynnwys yr elfen 0 yn unig, a V ei hunan. Gelwir pob isofod arall yn isofod priodol ac yn aml, sonir am y ddwy isofod yma fel rhai distadl.

Yn dilyn, mae nifer o engreifftiau gyda rhai ohonynt yn ofodau fector cyffredinol o gryn bwys. Trwy ddefnyddio Lemma 3.6 mae'n llawer iawn hawddach gwirio eu bod yn ofodau fector na'r broses hir o wirio pob un o'r acsiomau y byddai'n rhaid eu gwneud o ddefnyddio'r diffiniad gwreiddiol.

ENGHREIFFTIAU

1. **Gadawer i $W = \{(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\ (i = 2, \ldots, n)\} \subset V_n(K)$, yna mae W yn isofod o $V_n(K)$, gan fod**

   (i) W yn is-set anwag, er enghraifft, mae $(0, 0, \ldots, 0) \in W$,

   (ii) os yw $\alpha \in K$, $u = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $v = (0, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in W$, yna mae $\alpha u + v = (0, \alpha\alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha\alpha_n + \beta_n) \in W$.

2. **Gadawer i $W = \{(1 + \alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\ (i = 2, \ldots, n)\} \subset V_n(K)$, yna nid yw W yn isofod o $V_n(K)$, gan fod, er enghraifft $(2, 1, \ldots, 0) \in W$ ond nid yw $2(2, 1, \ldots, 0) = (4, 2, 0, \ldots, 0) \notin W$. (Sylwer, er mwyn profi hyn, y cyfan oedd angen ei wneud oedd arddangos un gwrthenghraifft)**

3. **Gadawer i $M_n^{(s)}(K) = \{a \in M_n(K) \mid A^t = A\} \subset M_n(K)$, sef yr is-set o fatricsau cymesur yn $M_n(K)$. Yna mae $M_n^{(s)}(K)$ yn isofod o $M_n(K)$ gan fod $M_n^{(s)}(K)$ yn anwag, er enghraifft mae $0 \in M_n^{(s)}(K)$. Os yw $\alpha \in K$, $A, B \in M_n^{(s)}(K)$, yna, trwy ddefnyddio Lemma 1.18 , mae**

   $$(\alpha A + B)^t = \alpha A^t + B^t = \alpha A + B,$$

   hynny yw, mae $\alpha A + B \in M_n^{(s)}(K)$.

4. **Gadawer i V fod y set o ddatrysiadau i'r system o m hafaliadau llinol homogenaidd mewn n newidyn**

   $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

   neu yn nhermau matricsau $Ax = 0$, lle mae $A = (\alpha_{ij})$ ac $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

   Yna mae V yn isofod o $V_n(K)$, a elwir y gofod datrysiadau o'r system, gan fod $0 \in V$, hynny yw, yn ddatrysiad distadl o'r system ac os yw $\alpha \in K$, $X, Y \in V$, yna mae

   $$A(\alpha X + Y) = \alpha AX + Y = \alpha 0 + 0 = 0.$$

   Felly, gwelir fod y broblem o ddarganfod y datrysiad cyffredinol i system o hafaliadau llinol homogenaidd yn gyfystur a darganfod y gofod

datrysiadau o'r system; gwelir yn y man fod edrych ar y broblem o'r cyfeiriad newydd yma yn un proffidiol gan ei fod yn rhoi dirnadaeth dyfnach o'r sefyllfa.

5. **Gadawer i $C[a,b]$ fod y set o ffwythianau di-dor o werth real wedi eu diffinio ar y parth caeedig $[a,b]$, yna mae $C[a,b]$ yn isofod o $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Os yw $f, g \in C[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, yna mae $\alpha f + g \in C[a,b]$, fel y gellir ei weld mewn unrhyw gyflwyniad i calcwlws elfennol neu analysis real, hynny yw, os yw f a g yn ffwythianau real di-dor dros barth yna mae $f + g$ a αf yn ffwythianau real di-dor dros yr un parth.**

   Gadawer i $C'[a,b]$ fod y set o ffwythianau real ddi-dor ddifferadwy wedi eu diffinio ar y parth caeedig $[a,b]$, hynny yw, y set o'r holl ffwythianau sydd gan ddeilliad di-dor ar bob pwynt o $[a,b]$, yna mae $C'[a,b]$ yn isofod o $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Mae hwn eto yn ganlyniad sylfaenol ym myd analysis real.

   Côd y cwestiwn a yw'r ddau isofod yma yn hafal a'i gilydd. Yn sicr, mae $C'[a,b] \subseteq C[a,b]$ gan fod bob ffwythiant differadwy yn ddi-dor. Yn wir, mae'r cynhwysiad yn un caeth, gan, er enghraifft, mae'r ffwythiant $f(x) = |x|$ am bob $x \in [a,b]$ yn ddi-dor ond nid oes ganddo ddeilliad pan mae $x = 0$.

   Mae'n bosibl ymestyn yr uchod i drafod ffwythianau y gellir eu differu unrhyw nifer o weithiau. Diffinnir $C^n[a,b]$ fel y set o ffwythianau y gellir eu differu'n ddi-dor n gwaith. Hefyd, dynoda $C^\infty[a,b]$ y set o ffwythianau y gellir eu differu'n ddi-dor unrhyw nifer o weithiau. Unwaith eto, gellir dangos fod $C^n[a,b]$ $(n \geq 1)$ a $C^\infty[a,b]$ yn ofodau-$\mathbb{R}$, hynny yw, mae'r ddau ofod yn isofod o $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Hefyd, os yw $m \geq n$, mae $C^m[a,b]$ yn isofod o $C^n[a,b]$. Ychwanegir $C[a,b]$, $C^n[a,b]$ a $C^\infty[a,b]$ i'r rhestr o ofodau fector safonol a gyflwynwyd ynghynt. Hefyd, defnyddir $C(\mathbb{R})$, $C^n(\mathbb{R})$ a $C^\infty(\mathbb{R})$ yn yr achos arbennig $[a,b] = \mathbb{R}$.

6. **Gadawer i V fod yr is-set o $C^n[a,b]$ sy'n ddatrysiadau o'r hafaliad differol llinol sefydlog**
$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0,$$
   lle mae $a(x), b(x) \in C[a,b]$. Os yw $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, yna mae
$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}(f+g)(x) + a(x)\frac{d}{dx}(f+g)(x) + b(x)(f+g)(x) \\
&= \left(\frac{d^2}{dx^2}f(x) + a(x)\frac{d}{dx}f(x) + b(x)f(x)\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2}g(x) + a(x)\frac{d}{dx}g(x) + b(x)g(x)\right) \\
&= 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

   lle eto defnyddiwyd theoremau o faes analysis. Felly mae $f + g \in V$, ac yn yr un modd gwelir fod $\alpha f \in V$ ac felly, mae V yn isofod o $C^2[a,b]$. Gelwir V yn ofod datrysiad o'r hafaliad differol uchod.

Weithiau, ychwanegir amodau ffin sy'n rhaid eu bodlonni, er enghraifft, os U yw gofod datrysiad y hafaliad differol

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

gyda'r amodau ffin $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, yna mae U yn isofod o'r gofod-$\mathbb{R}$ $C^2[0, \pi]$.

Yn awr, ystyriwn wahanol ffyrdd o greu rhai isofodau o bwys mewn gofod fector.

Lemma 3.7 ***Os yw U a W yn isofodau o V, yna mae $U \cap W$ yn isofod o V.***

PRAWF Mae'n amlwg fod $0 \in U \cap W$ gan fod $0 \in U$ a $0 \in W$, felly mae $U \cap W \neq \emptyset$. Hefyd, os yw $u, v \in U \cap W$, $\alpha \in K$, yna mae $u, v \in U$ a $u, v \in W$ a gan fod U a W yn isofodau, mae $\alpha u + v \in U \cap W$.

Ond, yn gyffredinol, nid yw'r uniad o ddau isofod yn isofod, er enghraifft, mae $U = \{\alpha, 0) \mid \alpha \in K\}$ a $W = \{0, \beta) \mid \beta \in K\}$ yn Isofodau o $V_2(K)$, ond er enghraifft, nid yw $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ yn $U \cup W$. Ond, fel y gwelir yn awr, mae'n bosibl cyfuno (adio) dwy isofod i greu isofod newydd. Diffinnir y swm o ddau isofod U a W o V trwy osod

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Mae'n hawdd profi fod $U + W$ yn isofod, ond yn lle profi hynny, profir canlyniad mwy cyffredinol sydd yn cynnwys hwn.

Diffiniad 3.8 ***Gadawer i $W_1, W_2, \ldots, W_k$ fod yn isofodau o'r ofod fector V dros K. Gosodir***

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{w_1 + w_2 + \ldots + w_k \mid w_i \in W_i \ (i = 1, 2, \ldots, k)\}.$$

Gelwir W yn* swm *yr isofodau $W_1, W_2, \ldots, W_k$.

Yna gellir profi, trwy ddefnyddio Lemma 3.6

Lemma 3.9 ***Os yw $W_1, W_2, \ldots, W_k$ yn isfodau o'r ofod fector V dros K yna mae***

(i) $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$ ***yn isofod o V,***

(ii) $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ ***yn isofod o V.***

PRAWF. (i) Gan fod $0 \in W_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, yna mae $0 \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$, ac felly, mae $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k \neq \emptyset$.

Os yw $\alpha \in K$, $u, v \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$, yna mae $u, v \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ac felly, mae $\alpha u + v \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ac hefyd mae $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k$.

(ii) Mae $0 = 0 + 0 + \cdots + 0 \in W_1 + W_2 + \cdots + W_k$, gan fod $0 \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Ymhellach, os yw $\alpha \in K$, $u, v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_k$, yna mae $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$,

$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, lle mae $u_i, v_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Felly mae $\alpha u_i + v_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ac mae'n dilyn fod

$$\begin{aligned} \alpha u + v &= \alpha(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \\ &= (\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2) + \cdots + (\alpha u_k + v_k), \end{aligned}$$

hynny yw, $\alpha u + v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

Yn derfynol, cyflwynir un modd arall o gynhyrchu isofod sy'n cyflwyno cysyniad arall o bwys. Gadawer i $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ fod yn is-set meidraidd o ofod fector V. Gadawer i

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in K \ (i = 1, 2, \ldots, k) \right\}.$$

Yna gellir profi'r canlynol,

Lemma 3.10 *Mae U yn isofod o V.*

PRAWF Mae $0 \in U$ gan fod $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k \in U$. Os yw $\alpha \in K$, $u, v \in U$, yna mae $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ a $v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$ am rhyw $\alpha_i, \beta_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Felly, ceir fod

$$\begin{aligned} \alpha u + v &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\alpha \alpha_i + \beta_i) v_i \in U \end{aligned}$$

ac felly, trwy ddefnyddio Lemma 3.6 eto ceir fod U yn isofod o V.

Mae hyn yn arwain i'r diffiniad dilynol sydd o gryn arwyddocad yn y gwaith sy'n dilyn.

Diffiniad 3.11 *Gadawer i $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$, yna gelwir $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, lle mae $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ yn* **gyfuniad linol-K** *o S. Gelwir yr isofod U a adeiladwyd uchod yr isofod a eneradwyd (neu a rychwantwyd) gan yr is-set S. Dynodir hyn gan $S = \langle S \rangle$ neu $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$. Gelwir isofod U o V a eneradwyd gan is-set meidraidd o V yn* **isofod generadol feidraidd** *o V.*

Darlunir y cysyniadau yma mewn nifer o enghreifftiau yn yr adran nesaf.

(Gellir ymestyn y diffiniad uchod i drafod is-setiau anfeidraidd hefyd. Os yw S yn is-set o V, gadawer i

$$U = \left\{ \sum_{s \in S}^{k} \alpha_s v_s \mid \alpha_s \in K \right\},$$

lle ymhob swm mae pob un o'r α_s yn sero heblaw am rif meidraidd ohonynt. Yna mae U yn isofod o V a elwir yr isofod a eneradwyd gan S.

Ymarferion 3.3

1. Pa rai o'r is-setiau canlynol o $V_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 3)$ sy'n ofodau fector?

(i) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$,

(ii) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\}$,

(iii) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \mid \alpha_3 = \alpha_1\alpha_2\}$,

(iv) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \mid |\alpha_1| > 0\}$,

(v) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \mid \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3\}$,

2. Pa rai o'r is-setiau canlynol o $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sy'n ofodau-$\mathbb{R}$

(i) Y set o bolynomiolau o radd yn union n,

(ii) y set o bolynomiolau o radd $< n$,

(iii) y set o ffwythiannau od (hynny yw, $f(-x) = -f(x)$ am bob $x \in \mathbb{R}$),

(iv) y set o ffwythiannau differadwy.

3. Pa rai o'r is-setiau canlynol o $C[0,1]$ sy'n ofodau-$\mathbb{R}$

(i) $\{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0\}$,

(ii) $\{f \in C[0,1] \mid f(1) = 1\}$,

(iii) $\{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$,

(iv) $\{f \in C[0,1] \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$,

(v) $\{f \in C[0,1] \mid \int_0^1 f(t)dt = 1\}$.

4. Pa rai o'r is-setiau canlynol o $M_2(\mathbb{R})$ sy'n isofodau?

(i) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = b\right\}$,

(ii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b = 1\right\}$,

(iii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = c = d\right\}$,

(iv) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$,

(v) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$,

(vi) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA$ **am fatrics sefydlog** $B \in M_2(\mathbb{R})\}$,

(vii) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$.

5. Pa rai o'r is-setiau canlynol o $M_3(\mathbb{R})$ sy'n isofodau?

(i) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$,

(ii) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0\}$,

(iii) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$

6. **Gadawer i V fod y set o'r holl ddilyniannau $\{\alpha_n\} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ yn cynnwys elfennau o $\mathbb{R}$. Diffinnir adio dilyniannau gan**

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$$

a lluosi sgalar gan elfennau o $\mathbb{R}$ gan

$$\alpha\{\alpha_n\} = \{\alpha\alpha_n\}.$$

Profwch fod V yn ofod fector dros $\mathbb{R}$.

7. **Trwy ddangos eu bod yn isofodau o'r gofod fector V yn Ymarfer 6, dangoswch fod y canlynol yn ofodau fector dros $\mathbb{R}$.**

   (i) $\{\{\alpha_n\} \mid \alpha_{n+1} - \alpha_n = \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}, n \geq 0, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$**, hynny yw, y set o'r holl ddilyniannau rhifyddol,**

   (ii) $\{\{\alpha_n\} \mid \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \alpha_n, n \geq 0, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$**, hynny yw, y set o'r holl ddilyniannau Fibonacci,**

   (iii) $\{\{\alpha_n\} \mid$ **am bob** $\epsilon > 0$, **bodola integryn** N **fel bod** $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$ **am bob** $n > N$ **am rhyw** $\alpha\}$**, hynny yw, y set o'r holl ddilyniannau cydgyfeiriol,**

   (iv) $\{\{\alpha_n\} \mid$ **am bob** $\epsilon > 0$, **bodola integryn** N **fel bod** $|\alpha_m - \alpha_n| < \epsilon$ **am bob** $m, n > N\}$**, hynny yw, y set o'r holl ddilyniannau Cauchy.**

3.4 Annibyniaeth Llinol, Sylfeini a Dimensiwn

Gadawer i V fod yn ofod-K.

Diffiniad 3.12 ***Dywedir fod is-set*** $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ***yn*** V ***yn*** **llinol ddibynnol dros** K ***os bodola*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K$***, ddim oll yn sero, fel bod***

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0.$$

Fel arall, dywedir fod $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ***yn*** V ***yn*** **llinol annibynnol dros** K***. Felly, mewn geiriau eraill, os yw***

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

yn golygu fod $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$***, yna mae*** $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ***yn llinol annibynnol dros*** K***.***

ENGHREIFFTIAU

1. **Mae $\{(1,0,1), (1,-1,1), (2,-1,2), (0,0,1)\}$ yn llinol ddibynnol dros $\mathbb{R}$ gan fod**

$$(1,0,1) + (1,-1,1) - (2,-1,2) + 0(0,0,1) = (0,0,0),$$

ond mae $\{(1,0,1), (0,0,1)\} \subseteq V_3(\mathbb{R})$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$ gan fod

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) = (0,0,0),$$

yn golygu fod $\alpha = 0,\ \alpha + \beta = 0$, sy'n rhoi fod $\alpha = 0,\ \beta = 0$.

2. Gwelwyd yn Engreifftiau 5 a 6 yn § 3.2 fod $\mathbb{C}$ yn ofod-$\mathbb{R}$ ac yn ofod-$\mathbb{C}$
Mae'r set $\{1+i, i\}$ yn llinol ddibynnol dros $\mathbb{C}$ gan fod

$$1(1+i) + (-1+i)i = 1 + i - i - 1 = 0,$$

ond yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, o achos, os yw

$$\alpha(1+i) + \beta i = 0 \textbf{ gyda } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

yna, gan fod $\{1, i\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, mae $\alpha = 0$ ac $\alpha + \beta = 0$ neu $\alpha = 0$ a $\beta = 0$.

(Gellir ymestyn Diffiniad 3.12 i drin setiau anfeidraidd hefyd; dywedir fod unrhyw is-set $S \subseteq V$ yn llinol annibynnol dros K os yw pob is-set meidraidd o S yn llinol annibynnol dros K, fel arall dywedir fod S yn llinol ddibynnol dros K.)

Diffiniad 3.13 ***Dywedir fod is-set*** $S \subseteq V$ ***yn*** **sylfaen-K** ***i*** V ***os yw***
(i) S ***yn generadu*** V ***dros*** K***,***
(ii) S ***yn llinol annibynnol dros*** K***.***

Hynny yw, os yw $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ yn set feidraidd, yna golyga hyn, os yw $v \in V$ yna mae $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, am rhyw $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ac os yw $\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = 0$, lle mae $\beta_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, yna mae $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

O hyn allan, canolbwyntir ar yr achos hwn, sef gofodau-K generadol meidraidd. Cyn darlunio yr uchod drwy enghreifftiau, cyflwynir criterion yn nhermau determinantau a ddywed pryd mae n colofn matrics sgwar $n \times n$ yn llinol annibynnol. Yn wir, mae'r theorem yma yn arddangos y berthynas agos sydd rhwng y syniadau a gyflwynwyd yma gyda'r gwaith blaenorol ar ddeterminantau.

Theorem 3.14 ***Os yw*** $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$ ***a*** $c_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ***yw*** n ***colofn*** A***, yna mae*** $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ ***yn llinol ddibynnol os a dim ond os mae*** $\det A = 0$***.***

PRAWF Os yw $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ yn llinol ddibynnol dros K, yna bodola $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$
$\alpha_n \in K$, (nid oll yn sero), fel bod

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n = 0.$$

Heb golli cyffredinolrwydd, cymerir fod $\alpha_1 \neq 0$, yna mae

$$c_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} c_n = 0.$$

Yn awr, trwy dynnu $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ gwaith yr ail golofn + $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ gwaith y drydedd golofn $+ \cdots +$ $\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ gwaith y golofn olaf o'r golofn gyntaf, ceir matrics gyda'r golofn gyntaf yn sero, felly trwy ddefnyddio Sylw 2 yn §2.2, ceir fod $\det A = 0$.

I'r gwrthwyneb, os yw $\det A = 0$**, yna trwy ddefnyddio Canlyneb 2.10, mae gan y system o hafaliadau llinol**

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ddatrysiad anistadl $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$**, hynny yw, bodola** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$**, nid oll yn sero, fel bod**

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n = 0,$$

sy'n profi fod $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ **yn llinol ddibynnol dros** K**.**

Trwy ystyried y trawsddodyn A^t **o'r matrics** A**, gellir profi yn yr un modd y ganlyneb sy'n dilyn.**

Canlyneb 3.15 ***Mae'r*** n ***rhes y matrics*** A ***yn llinol ddibynnol dros*** K ***os a dim ond os yw*** $\det A = 0$***.***

ENGHREIFFTIAU

1. **Gadawer i** $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$**, yna mae** $\{e_1, e_2, e_3\}$ **yn sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i'r gofod-**$\mathbb{R}$ $V_3(\mathbb{R})$ **gan fod**

   (i) os yw $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **yn elfen mympwyol o** $V_3(\mathbb{R})$**, yna mae**

   $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

   hynny yw, mae $\{e_1, e_2, e_3\}$ **yn generadu** $V_3(\mathbb{R})$ **dros** $\mathbb{R}$**.**

   (ii) os yw $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$**, yna mae** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$**, hynny yw, mae** $\{e_1, e_2, e_3\}$ **yn llinol ddibynnol dros** $\mathbb{R}$**.**

2. **Gadawer i** $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (4, 1, 1)$**, yna dangosir fod** $\{v_1, v_2, v_3\}$ **hefyd yn sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V_3(\mathbb{R})$**. Ond, y tro yma mae angen mwy o waith i ddod i'r canlyniad. Yn gyntaf, a yw'r set** $\{v_1, v_2, v_3\}$ **yn generadu** $V_3(\mathbb{R})$ **dros** $\mathbb{R}$**? Hynny yw, os yw** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **yn elfen fympwyol o** $V_3(\mathbb{R})$**, rhaid arddangos fod**

   $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$$

   am rhyw $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$**. Hynny yw, rhaid datrys y system o hafaliadau llinol**

   $$\begin{array}{ccccccc} \beta_1 & + & 2\beta_2 & + & 4\beta_3 & = & \alpha_1 \\ & - & \beta_2 & + & \beta_3 & = & \alpha_2 \\ \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & \alpha_3. \end{array}$$

   Trwy ddefnyddio y method a ddisgrifwyd ym Mhennod 1, gwelir fod y matrics

   $$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 4 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha_3 \end{array}\right)$$

yn rhes gywerth â'r matrics

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(-2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(\alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3), \end{array}\right)$$

ac felly, mae

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{4}\{(-2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3)v_1+(\alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3)v_2+(-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)v_3\}.$$

Hynny yw, mae $\{v_1,v_2,v_3\}$ yn generadu $V_3(\mathbb{R})$ dros $\mathbb{R}$.

Hefyd, mae'r set $\{v_1,v_2,v_3\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, o achos os yw

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=0,$$

lle mae $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$, yna ceir fod

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = & 0 \\ & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

Trwy ddefnyddio'r ffaith uchod mai matrics echelon gostyngol y matrics $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ yw'r matrics $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (neu fod $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=4\neq 0$), gwelir mai $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ yw datrysiad unigryw y system.

Mae'r ddwy enghraifft uchod yn dangos nad yw'r sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod fector yn unigryw.

3. **Gadawer i $e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,\ldots,0,1)\in V_n(K)$. Yna mae $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ yn sylfaen-K i $V_n(K)$ o achos os yw $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ yn elfen fympwyol o $V_n(K)$, yna gwelir fod**

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,$$

hynny yw, mae $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ yn generadu $V_n(K)$ dros K; hefyd, os yw $\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i=0$, yna mae $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)$, neu $\alpha_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, hynny yw, mae $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ yn llinol annibynnol dros K. Gelwir $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ yn sylfaen-K safonol i $V_n(K)$.

4. **Gadawer i**

$$e_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad e_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

yna mae $\{e_{11},e_{12},e_{21},e_{22}\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $M_2(\mathbb{R})$, o achos

(i) os yw $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$**, mae**

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \alpha_{21}e_{21} + \alpha_{22}e_{22}$$

ac felly, mae $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ **yn generadu** $M_2(\mathbb{R})$ **dros** $\mathbb{R}$**,**

(ii) i ddangos fod $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ **yn llinol annibynnol dros** $\mathbb{R}$**, cymerer fod**

$$\alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \alpha_{21}e_{21} + \alpha_{22}e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{neu} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ac felly ceir $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$**.**

5. **Gellir dangos yn union yr un modd fod** $S = \{e_{ij} \mid i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ **yn sylfaen-**K **i'r ofod fector** $M_n(K)$**, lle mae** e_{ij} **yw'r matrics** $n \times n$ **gyda** 1 **yn y safle-**(i, j) **a** 0 **ymhob safle arall. Yn gyntaf, os yw** (α_{ij}) **yn fatrics mympwyol yn** $M_n(K)$**, yna mae**

$$(\alpha_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}e_{ij},$$

ac felly mae S **yn generadu** $M_n(K)$ **dros** K**. Hefyd, os yw**

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}e_{ij} = 0,$$

lle mae $\alpha_{ij} \in K$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$**, yna mae** $(\alpha_{ij}) = (0)$ **sy'n golygu fod** $\alpha_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ **ac felly bod** S **yn llinol annibynnol dros** K**.**

6. **Yn Enghraifft 3, gwelwyd fod** $\{(1, 0), (0, 1)\}$ **yn sylfaen-**$\mathbb{C}$ **i'r ofod fector** $V_2(\mathbb{C})$**. Ond gellir ystyried** $V_2(\mathbb{C})$ **fel gofod fector dros** $\mathbb{R}$ **hefyd, gan fod** $V_2(\mathbb{C})$ **fel** $V_2(\mathbb{C}) = \{(\alpha_1 + \alpha_2 i, \beta_1 + \beta_2 i) \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$**. Dangosir yn awr fod** $S = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ **yn sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V_2(\mathbb{C})$ **(sylwer** $i = \sqrt{-1}$**).**

   Gan fod $(\alpha_1 + \alpha_2 i, \beta_1 + \beta_2 i) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(i, 0) + \beta_1(0, 1) + \beta_2(0, i)$ **am bob** $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$**, mae** S **yn generadu** $V_2(\mathbb{C})$ **dros** $\mathbb{C}$**.**

   Hefyd, trwy ystyried

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(i, 0) + \beta_1(0, 1) + \beta_2(0, i) = (0, 0)$$

   lle mae $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$**, gwelir fod** $\alpha_1 + \alpha_2 i = 0$**,** $\beta_1 + \beta_2 i = 0$**, neu** $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ **ac mae** S **hefyd yn llinol annibynnol dros** $\mathbb{R}$**.**

7. Gellir profi yn yr un modd fod

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0,1),(i,0,\ldots,0),(0,i,0,\ldots,0),(0,0\ldots,0,i)\}$$

yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_n(\mathbb{C})$ wrth ei ystyried fel gofod-$\mathbb{R}$.

8. Darganfyddir sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod datrysiad y system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & w & = & 0. \end{array}$$

Gellir dangos yn hawdd mai matrics echelon gostyngol y system hwn yw

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

ac felly mae'r system wreiddiol yn gywerth â'r system

$$\begin{array}{ccccc} x & = & -\frac{1}{5}z & - & \frac{1}{5}w \\ y & = & \frac{7}{5}z & - & \frac{3}{5}w. \end{array}$$

Os rhoddir y gwerthoedd mympwyol λ,μ i z,w yn ôl eu trefn, yna datrysiad cyffredinol y system yw

$$\begin{aligned} (x,y,z,w) &= (-\lambda-\mu, 7\lambda-3\mu, 5\lambda, 5\mu) \\ &= \lambda(-1,7,5,0)+\mu(-1,-3,0,5), \end{aligned}$$

hynny yw, y gofod datrysiad yw $\langle\!\langle(-1,7,5,0),(-1,-3,0,5)\rangle$ ac mae'n glir fod y set $\{(-1,7,5,0),(-1,-3,0,5)\}$ hefyd yn llinol annibynnol ac felly yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i'r ofod ddatrysiad.

9. Darganfyddir sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod datrysiad yr hafaliad differol

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y \;=\; 0 \;\textbf{ neu }\; y''+y \;=\; 0, \tag{3.4.3}$$

lle mae $y \in C^\infty(\mathbb{R})$. Gellir datrys yr hafaliad differol hwn trwy ddefnyddio calcwlws elfennol fel â ganlyn: Trwy luosi gyda y' ceir

$$y''y'+yy'=0,$$

a thrwy integreiddio hwn ceir

$$y'^2+y^2=c^2,$$

lle mae c yn gysonyn mympwyol yn $\mathbb{R}$. Felly, ceir fod

$$y'=\sqrt{c^2-y^2} \;\textbf{ neu }\; \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=dx,$$

a thrwy integreiddio hwn, ceir fod

$$\sin^{-1}\frac{y}{c} = x + d \quad \textbf{neu} \quad y = c\sin(x+d)$$

lle mae d yn gysonyn mympwyol yn $\mathbb{R}$. Felly, ceir fod

$$\begin{aligned} y &= c\cos d\sin x + c\sin d\cos x \\ &= \gamma\sin x + \delta\cos x \end{aligned}$$

lle mae $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Felly, gofod datrysiad (3.4.3) yw $\langle \sin x, \cos x\rangle$. Hefyd, mae'r set $\{\sin x, \cos x\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, o achos os yw

$$\alpha\sin x + \beta\cos x = 0,$$

lle mae $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, yna trwy roi $x = 0$ a $x = \pi/2$, gwelir fod $\alpha = 0$ a $\beta = 0$ yn ôl eu trefn. Felly, mae $\{\sin x, \cos x\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod datrysiad (3.4.3).

SYLW Sylwer pa mor debyg yn eu saernaeth yw'r modd o ystyried y broblem o ddatrys hafaliadau llinol homogenaidd a hafaliadau llinol differol. Ond tra cyflwynwyd method systematic i ddarganfod sylfaen-K i ofod datrysiad system o hafaliadau llinol homogenaidd, ni ystyrir y broblem gyfatebol i hafaliadau differol. Cyflwynwyd y method elfennol i ddatrys yr enghraifft arbennig yn Enghraifft 9 uchod er mwyn darlunio'r sefyllfa yn unig - am driniaeth cynhwysfawr o gymhwysiad algebra llinol i hafaliadau llinol ac analysis yn gyffredinol gweler, er enghraifft, *An Introduction to Linear Analysis* gan D.L. Kneider, R.G. Fuller, D.R.Ostberg a F.W. Perkins (Addison-Wesley)(KFOP)

Gadawer i $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fod yn sylfaen-K i'r ofod fector V. Os yw $v \in V$, yna mae $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, lle mae $\alpha_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yn unigryw. Gelwir yr twpl-n $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in V_n(K)$ yn gyfesurynnau v mewn perthynas â'r sylfaen-K $\mathcal{B}$ - yn achlysurol dynodir hwn gan $[v]_{\mathcal{B}}$.

ENGHRAIFFT

Yn Enghraifft 2 uchod, gwelir mai cyfesurynnau y fector $(1, -1, 1)$ mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ yw $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$, hynny yw,

$$(1, -1, 1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3.$$

Gwelwyd y Enghreifftiau 1 a 2 uchod, yn gyffredinol fod gan ofod-K fwy nag un sylfaen-K; ond yn yr enghreifftiau hyn sylwir fod gan y ddau sylfaen-K yr un nifer o elfennau. Yn y theorem ganlynol, gwelir fod hyn yn wir yn gyffredinol.

Theorem 3.16 ***Mae gan bob sylfaen-K i ofod-K generadol feidraidd yr un nifer o elfennau.***

PRAWF Dangosir yn gyntaf, os yw V yn ofod fector a eneradwyd gan set feidraidd o fectorau $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ac os yw $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ yn set linol annibynnol o fectorau yn V, yna mae $m \leq n$.

Cymerer fod $m > n$, dangosir fod hyn yn arwain i wrthddywediad o'r dybiaeth fod $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ yn llinol annibynnol. Os yw $y_j \in V$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, yna mae

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$$

lle mae $\alpha_{ij} \in K$. Yna, os yw $\beta_j \in K$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_j \right) v_i. \end{aligned}$$

Gan fod $n < m$, trwy ddefnyddio Canlyneb 1.10, bodola $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in K$ (ddim i gyd yn sero) fel bod $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_j = 0$ sydd yn ei dro yn arwain i'r canlyniad fod $\sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j = 0$ ac felly bod $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ yn llinol ddibynnol- sef y gwrthddywediad a edrychwyd amdano.

Yn awr, cymerer fod $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ yn sylfaeni-K i'r ofod fector V. Yna trwy ystyried $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ fel is-set llinol annibynnol yn yr ofod fector sydd wedi ei generadu gan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, mae'r ddadl uchod yn profi fod $m \leq n$. Yn yr un modd, trwy ystyried $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fel is-set llinol annibynnol yn yr ofod fector sydd wedi ei generadu gan $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$, ceir fod $n \leq m$. Felly, mae'r ddau ganlyniad yma, o'u cymeryd gyda'i gilydd, yn arwain i'r canlyniad $m = n$.

Mae'r canlyniad yma yn awr yn arwain i'r diffiniad pwysig canlynol.

Diffiniad 3.17 ***Gelwir y nifer o elfennau mewn unrhyw sylfaen-K i ofod-K V generadol feidraidd yn* ddimensiwn dros *K o V; dynodir hwn gan* $\dim V$ *neu* $(V : K)$*. Gelwir V yn* ofod fector o ddimensiwn meidraidd*.***

ENGHREIFFTIAU

Trwy edrych yn fanwl ar yr engreifftiau uchod, gwelir bod

(i) $(V_3(\mathbb{R}) : \mathbb{R}) = 3$

(ii) $(V_n(K) : K) = n$

(iii) $(V_n(\mathbb{C}) : \mathbb{R}) = 2n$

(iv) $(M_n(K) : K) = n^2$

(v) $(M_n(\mathbb{C}) : \mathbb{R}) = 2n^2$

Dengys y theorem nesaf, nid yn unig fod sylfaen-K yn bodoli ond hefyd, mae'n rhoi ffordd ymarferol o ddarganfod sylfaen-K i ofod fector. Ond yn gyntaf, profir y lemma ganlynol,

Lemma 3.18 ***Os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn set linol ddibynnol mewn gofod-K V, yna mae o leiaf un o'r v_i yn gyfuniad llinol o'r fectorau sy'n ei flaenori.***

PRAWF Os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn set llinol ddibynnol dros K, yna bodola $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ddim i gyd yn sero, fel bod

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

Gadawer i j fod yn integryn positif fel bod $1 \leq j \leq n$ ac $\alpha_j \neq 0$ a $\alpha_{j+1} = \alpha_{j+2} = \ldots = \alpha_n = 0$, yna mae

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1}$$

sy'n profi'r lemma.

Theorem 3.19 ***Gadawer i V fod yn ofod-K generadol feidraidd, yna***
(i) mae pob set sy'n generadu V yn cynnwys sylfaen-K i V,
(ii) gellir ymestyn pob is-set linol annibynnol yn V i roi sylfaen-K i V, hynny yw, os yw $\{y_1, y_2, \ldots y_m\} \subset V$ yn llinol annibynnol dros K, yna bodola fectorau $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m} \in V$ fel bod $\{y_1, y_2, \ldots y_m, x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ yn sylfaen-K i V.

PRAWF (i) Gadawer i $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ eneradu V dros K. Yna, os yw S yn llinol annibynnol dros K, yna mae S yn sylfaen-K i V. Os nad yw S yn llinol annibynnol, yna trwy ddefnyddio Lemma 3.18 uchod gwelir, am rhyw $1 \leq j \leq m$, fod x_j yn llinol annibynnol ar y fectorau sy'n ei ragflaenu. Yna, os yw $S' = S \setminus \{x_j\}$, yna mae S' hefyd yn generadu V dros K. Os yw S' yn llinol annibynnol, yna S' yw'r sylfaen-K i V a edrychir amdano. Os ddim, rhaid ailadrodd y ddadl uchod ar y set S', ac yn wir, y cyfan sydd angen ei wneud yw ailadrodd y ddadl hyd at y ceir set sy'n linol annibynnol (ceir sicrwydd fod y broses yn dod i ben, gan fod m yn feidraidd ac hefyd bod set sy'n cynnwys un elfen yn unig o reidrwydd yn llinol annibynnol).

(ii) Os yw V yn eneradol feidraidd, gadawer i'r set $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ eneradu V dros K. Gadawer i $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ fod yn set linol annibynnol yn V. Yna, o brawf Theorem 3.16, mae $m \leq n$.

Ystyrier y set

$$S = \{y_1, y_2, \ldots y_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

yna mae S yn generadu V dros K (gan fod is-set o S yn gwneud hynny'n barod). Os yw S yn llinol annibynnol, yna mae S yn sylfaen-K i V gan brofi'r theorem. Os nad yw S yn llinol annibynnol, yna trwy ddefnyddio Lemma 3.18, yna mae un o'r fectorau yn S yn linol ddibynnol ar y fectorau sy'n ei ragflaenu. Mae'n rhaid mai un o'r v_i yw'r fector hwn, o achos pe bae un o'r y_i yn llinol ddibynnol ar y fectorau sy'n ei ragflaenu, yna byddai hynny yn gwrthddweud bod $\{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ yn set llinol annibynnol yn V. Felly, gadawer i'r fector hwn fod yn v_j a gadawer i $S' = S \setminus \{v_j\}$. Yna mae'n glir fod S' hefyd yn generadu V dros K. Os yw S' yn llinol annibynnol, yna hwn yw'r sylfaen-K sy'n bodlonni mynegiad y theorem. Os ddim, y cyfan sydd angen

ei wneud yw ailadrodd y broses uchod ar y set S'; eto bydd un o'r v_i yn llinol ddibynnol ar y fectorau sy'n ei ragflaenu. Eir ymlaen gyda'r broses hon o ddileu fectorau hyd at y ceir set sy'n llinol annibynnol (mae'r broses yn sicr o ddod i ben eto gan y profwyd yn (i) fod bob set sy'n generadu V dros K yn cynnwys sylfaen-K).

Gellir yn awr brofi yn hawdd y ganlyneb canlynol.

Canlyneb 3.20 ***Gadawer i V fod yn ofod-K o ddimensiwn meidraidd gyda $(V:K)=n$. Yna***

(i) mae unrhyw set llinol annibynnol yn V sy'n cynnwys n elfen yn sylfaen-K i V,

(ii) mae unrhyw set yn V sy'n generadu V ac yn cynnwys n elfen yn sylfaen-K i V.

PRAWF (i) Trwy (ii) o'r theorem uchod gwelir ei bod yn bosibl ymestyn bob set llinol annibynnol i fod yn sylfaen-K i V. Gan fod n fector yn y set yma a gan fod $(V:K)=n$, mae'n rhaid bod y set yma yn sylfaen-K i V.

(ii) Eto, trwy (i) o'r theorem uchod gwelir fod bob set sy'n generadu V dros K yn cynnwys sylfaen-K i V. Gan fod n fector yn y set yma a gan fod $(V:K)=n$, mae'n rhaid bod y set yma eto yn sylfaen-K i V.

Felly, beth mae'r ganlyneb yma yn ei ddangos yw, os gwyddir bod $(V:K)=n$, yna er mwyn profi fod set $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$ yn sylfaen-K i V, nid oes ond angen profi yntau

(i) bod S yn llinol annibynnol dros K

neu

(ii) bod S generadu V dros K.

Darlunir y theorem a'r prawf trwy ystyried yr enghraifft ganlynol.

ENGHRAIFFT

Gadawer i V fod yn isofod o $V_4(\mathbb{R})$ a eneradwyd gan y set $\{v_1=(1,1,2,4)$, $v_2=(2,-1,-5,2), v_3=(1,-1,-4,0), v_4=(2,1,1,6)\}$. Felly, canfyddir (i) sylfaen-$\mathbb{R}$ i V (ii) sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_4(\mathbb{R})$ sy'n cynnwys y sylfaen-$\mathbb{R}$ yma i V.

(i) Ystyrier

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4=0,$$

neu beth sy'n gywerth

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0\\
\alpha_1 & - & \alpha_2 & - & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0\\
2\alpha_1 & - & 5\alpha_2 & - & 4\alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0\\
4\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & + & 6\alpha_4 & = & 0.
\end{array}$$

Ceir fod

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&-1&-1&1\\2&-5&-4&1\\4&2&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-3&-2&-1\\0&-9&-6&-3\\0&-6&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&3&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

sy'n arwain i'r hafaliadau llinol canlynol sy'n gywerth â'r rhai gwreiddiol

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & = & \frac{1}{3}\alpha_3 & - & \frac{4}{3}\alpha_4 \\ \alpha_2 & = & -\frac{2}{3}\alpha_3 & - & \frac{1}{3}\alpha_4. \end{array}$$

Os rhoddir $\alpha_3 = -1,\ \alpha_4 = 0$ a $\alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = -1$, yn ôl eu trefn, yna ceir

$$\begin{array}{rcrcr} v_3 & = & -\frac{1}{3}v_1 & + & \frac{2}{3}v_2 \\ v_4 & = & \frac{4}{3}v_1 & + & \frac{1}{3}v_2. \end{array}$$

Felly, $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$ ac mae $\{v_1, v_2\}$ yn sylfaen-K i V.

(ii) Gadawer i $S = \{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, lle mae $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yw sylfaen-$\mathbb{R}$ safonol $V_4(\mathbb{R})$. Gan fod

$$\begin{array}{rclcrcrcrcr} v_1 & = & (1,1,2,4) & = & e_1 & + & e_2 & + & 2e_3 & + & 4e_4 \\ v_2 & = & (2,-1,-5,2) & = & 2e_1 & - & e_2 & - & 5e_3 & + & 2e_4, \end{array}$$

ceir fod

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2e_3 & + & 4e_4 & = & & & v_1 & - & e_1 & - & e_2 \\ 5e_3 & - & 2e_4 & = & - & & v_2 & + & 2e_1 & - & e_2, \end{array}$$

neu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} e_3 & = & \frac{1}{12}(v_1 & - & 2v_2 & + & 3e_1 & - & 3e_2) \\ e_4 & = & \frac{1}{12}(5v_1 & + & 2v_2 & - & 9e_1 & - & 3e_2), \end{array}$$

sy'n arwain i'r canlyniad

$$V_4(\mathbb{R}) = \langle v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4\rangle = \langle v_1, v_2, e_1, e_2\rangle.$$

(Fel arall, i ddod i'r un canlyniad, trwy ddefnyddio y ganlyneb uchod, gellid dangos fod $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$ yn unig).

Eir ymlaen yn awr i brofi theorem ddefnyddiol iawn sy'n arddangos perthynas agos rhwng dimensiynau dau isofod V_1 a V_2 o ofod-K V gyda dimensiynau y ddau isofod $V_1 + V_2$ a $V_1 \cap V_2$. Ond yn gyntaf rhaid profi y lemma ganlynol.

Lemma 3.21 *Mae pob isofod o ofod-K V o ddimensiwn meidraidd ei hun o ddimensiwn meidraidd dim mwy na $(V : K)$.*

PRAWF Gadawer i W fod yn isofod o ofod-K V. Gadawer i S fod yn set llinol annibynnol yn W. Ond gellir ystyried S fel is-set o V, a gan fod V yn ofod fector o ddimensiwn meidraidd, mae'n dilyn o brawf Theorem 3.16 fod S hefyd yn cynnwys rhif feidraidd o fectorau ac felly bod W o ddimensiwn meidraidd dros K a $(W : K) \leq (V : K)$.

Theorem 3.22 *Gadawer i W_1 a W_2 fod yn isofodau o'r ofod-K o ddimensiwn meidraidd V, yna mae*

$$(W_1 : K) + (W_2 : K) = (W_1 \cap W_2 : K) + (W_1 + W_2 : K).$$

PRAWF Fel canlyniad i Lemma 3.7, mae $W_1 \cap W_2$ yn isofod o V sydd trwy Lemma 3.21 uchod o ddimensiwn meidraidd dros K. Os yw $(W_1 \cap W_2 : K) = r < (V : K)$, gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ fod yn sylfaen-K i $W_1 \cap W_2$. Gan fod $W_1 \cap W_2$ yn isofod o W_1 a W_2, gellir ymestyn $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ i fod yn sylfaen-K i W_1 a W_2. Felly, gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ fod yn sylfaeni-K i W_1 a W_2 yn ôl eu trefn; felly mae $(W_1 : K) = r+n$ a $(W_2 : K) = r+m$. Yn awr, dangosir fod $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ yn sylfaen-K i $W_1 + W_2$ ac felly bod $(W_1 + W_2 : K) = r + n + m$ sy'n ddigon i gwblhau y prawf.

Heb amheuaeth, mae S yn generadu $W_1 + W_2$ dros K. Felly, nid oes ond angen dangos fod S yn llinol anniynnol dros K. Felly, ystyrier

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k = 0.$$

Yna mae

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j = -\sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k \in W_1 \cap W_2.$$

Gan fod $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ yn sylfaen-K i $W_1 \cap W_2$, bodola $\delta_i \in K(i = 1, 2, \ldots, r)$ fel bod

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k = \sum_{i=1}^{r} \delta_i v_i,$$

neu

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k - \sum_{i=1}^{r} \delta_i v_i = 0.$$

Gan fod$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ yn sylfaen-K i W_2, ac felly yn llinol annibynnol dros K, ceir fod

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_r = 0.$$

Yn yr un modd, gellir profi fod

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0,$$

ac felly bod

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0,$$

sy'n arwain i'r canlyniad fod

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$$

gan fod $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ yn sylfaen-K i $W_1 \cap W_2$. Trwy ddefnyddio'r uchod i gyd, gwelir fod S yn llinol annibynnol dros K ac felly yn sylfaen-K i $W_1 + W_2$.

Darlunir y theorem yma yn yr enghraifft ganlynol.

ENGHRAIFFT

Gadawer i W_1 a W_2 fod yn isofodau o'r ofod $V_4(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan $W_1 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mid \alpha = \beta\}$ a $W_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mid \alpha+\beta = \gamma, \delta = 2\beta\}$. Yna, mae'n weddol hawdd i ddangos bod $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i W_1 a $\{(1,0,1,0),(0,1,1,2)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i W_2. Mae

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,1,2)\}$$

yn generadu $W_1 + W_2$ dros $\mathbb{R}$, ond gan fod

$$(0,1,1,2) = 2(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1) + (1,1,0,0) - (1,0,1,0)$$

a gan fod $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0)\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, mae hefyd yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $W_1 + W_2$.

Os yw $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in W_1 \cap W_2$, yna mae

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha &=& \beta \\ 2\beta &=& \delta \\ \alpha+\beta &=& \gamma \end{array}\right\} \quad \textbf{neu} \quad \left.\begin{array}{rcl} \beta &=& \alpha \\ \gamma &=& 2\alpha \\ \delta &=& 2\alpha \end{array}\right\}.$$

ac felly, $W_1 \cap W_2 = \{(\alpha,\alpha,2\alpha,2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ac hefyd mae'n glir fod $\{(1,1,2,2)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $W_1 \cap W_2$. Nodir, bod $(W_1 : \mathbb{R}) = 3$, $(W_2 : \mathbb{R}) = 2$, $(W_1 + W_2 : \mathbb{R}) = 4$ a $(W_1 \cap W_2 : \mathbb{R}) = 1$, sy'n gwireddu y theorem fod

$$(W_1 : \mathbb{R}) + (W_2 : \mathbb{R}) = (W_1 \cap W_2 : \mathbb{R}) + (W_1 + W_2 : \mathbb{R})(= 5).$$

Ymarferion 3.4

1. **Profwch fod**
   - **(i)** $\{(1,0,3),(5,2,1),(0,1,6)\}$ **yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_3(\mathbb{R})$,**
   - **(ii) os yw t yn rif real sefydlog a $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x + t$ a $g_3(x) = (x+t)^2$, yna mae $\{g_1, g_2, g_3\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $P_3(\mathbb{R})$.**

2. **Profwch fod $\{(1,2,0),(0,5,7),(-1,1,3)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_3(\mathbb{R})$ a darganfyddwch gyfesurynnau $(0,13,17)$ a $(2,3,1)$ mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ hwn.**

3. **(i) Dangoswch fod $\{(3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), (7, 1+2\sqrt{2})\}$ yn llinol ddibynnoldros $\mathbb{R}$ ond yn llinol annibynnol dros $\mathbb{Q}$.**
   - **(ii) Dangoswch fod $(1-i, i), (2, -1+i)\}$ yn llinol ddibynnol dros $\mathbb{C}$ ond yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$.**

4. **Dangoswch bod (i)$\{e^t, \sin t, t^2\}$ a (ii) $\{\sin t, \cos t\}$ yn ddau set llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$.**

5. **Dangoswch bod yr is-set $\{(1,0,1,1),(1,0,2,4)\}$ o $V_4(\mathbb{R})$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$ ac estynnwch ef i fod yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_4(\mathbb{R})$.**

6. **Os yw $\{u, v, w\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{C}$ mewn gofod-$\mathbb{C}$, profwch fod**

(i) $\{u+v, v+w, w+u\}$ **yn llinol annibynnol dros** $\mathbb{C}$

(ii) $\{u+v-3w, u+3v-w, v+w\}$ **yn llinol ddibynnol dros** $\mathbb{C}$**.**

7. Dangoswch fod $(1,1,0,-1),(4,-2,1,0)\}$ **yn llinol annibynnol dros** $\mathbb{Q}$ **a darganfyddwch sylfaen-**$\mathbb{Q}$ **i** $V_4(\mathbb{Q})$ **sy'n cynnwys y ddau fector hwn.**

8. Profwch fod $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ **a** $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\}$ **yn isofodau o** $M_2(\mathbb{R})$**. Darganfyddwch sylfaeni-**$\mathbb{R}$ **i** $M, N, M \cap N$ **ac** $M+N$**.**

9. Os mai S **a** T **yw'r isofodau o** $V_4(\mathbb{R})$ **a ddiffinir gan** $S = \{(\alpha, \beta\,\gamma, \delta) \mid \alpha+\beta+\gamma = 0\}$ **a** $T = \{(\alpha, \beta\,\gamma, \delta) \mid \gamma = -\delta\}$**, darganfyddwch sylfaeni-**$\mathbb{R}$ **i** $S \cap T$ **a** $S+T$**.**

10. Darganfyddwch sylfaen-$\mathbb{R}$ **i ofod datrysiad yr hafaliad**

$$x \quad - \quad 2y \quad + \quad z \quad - \quad 3t \quad = \quad 0$$

11. Os yw U **a** W **yn isofodau 2-ddimensiwnal o** $V_3(\mathbb{R})$**, profwch fod** $(U \cap W : \mathbb{R} > 0$**.**

12. Gadawer i U **fod yr isofod o** $V_3(\mathbb{R})$ **a eneredir gan y ddau fector** $u = (1,2,3)$ **a** $v = (3,-5,1)$**. Dangoswch nad yw** $(1,0,0)$ **yn** U **ond bod** $(5,-23,-9)$ **yn** U**. Ysgrifennwch yr ail fector yn nhermau** u **a** v**.**

13. Darganfyddwch os yw'r is-setiau canlynol yn sylfaeni-$\mathbb{R}$ **i'r ofod-**$\mathbb{R}$ $P_n(\mathbb{R})$

(i) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+t+t^2+\cdots+t^n\}$

(ii) $\{1+t, t+t^2, \ldots, t^{n-1}+t^n\}$

(iii) $\{1, 1-t, \ldots, (1-t)^{n-1}\}$

14. A yw'r fectorau $u = (3,-1,0,-1)$ **a** $v = (1,0,4,-1)$ **yn yr isofod o** $V_4(\mathbb{R})$ **a eneredir gan** $\{(2,-1,3,2),(-1,1,1,-3),(1,1,9,-5)\}$**? Felly, darganfyddwch ddau sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V_4(\mathbb{R})$**, un yn cynnwys** u **a'r llall yn cynnwys** v**.**

15. Os yw S **yn set linol annibynnol o fectorau mewn gofod fector** V **ac** $v \in V$**, yna profwch** $v \notin V$ **os a dim ond os yw** $S \cup \{v\}$ **yn llinol annibynnol.**

Dangoswch fod y set $S = \{(1,0,-1,1),(2,-1,0,1),(1,1,2,1)\}$ **yn llinol annibynnol dros** $\mathbb{R}$ **a bod** $x = (1,3,3,2) \in \langle S \rangle$ **ac** $y = (0,1,1,-1) \notin \langle S \rangle$**. Darganfyddwch sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $\langle S \rangle$ **sy'n cynnwys** x **a sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V_4(\mathbb{R})$ **sy'n cynnwys** y**.**

16. Dangoswch y gellir ystyried $M_2(\mathbb{C})$ **fel gofod fector dros** $\mathbb{C}$ **ac hefyd dros** $\mathbb{R}$ **a darganfyddwch ei ddimensiwn yn y ddau achos. Yn y ddau achos, darganfyddwch ddimensiwn yr isofod a eneredir gan**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}.$$

17. **Os yw S a T yn isofodau o $V_3(\mathbb{C})$ a eneredir gan $\{(1,1,0),(i,1+i,1),(1+i,1+i,0)\}$ a $\{(1,0,1),(i,-i,0),(0,i,i)\}$ yn ôl eu trefn, darganfyddwch sylfaeni-$\mathbb{C}$ i $S\cap T$ a $S+T$.**

Yn awr, trwy ystyried rhain fel gofodau real, os S' a T' yw'r gofodau real a eneredir gan y setiau hyn, dangoswch fod $S'\cap T'=\{0\}$.

18. **Gadawer i V fod yr isofod o $P_3(\mathbb{R})$ a eneredir gan y polynomialau $1-t^2+t^3, 2+t-t^2+t^3, 1+2t+t^2-t^3$. Dangoswch fod $f(t)=t+t^2-t^3\in V$ ond $g(t)=1+t-t^2+t^3\notin V$. Darganfyddwch sylfaen-$\mathbb{R}$ i V sy'n cynnwys $f(t)$ a sylfaen-$\mathbb{R}$ i $P_3(\mathbb{R})$ sy'n cynnwys $g(t)$.**

Chapter 4

Trawsffurfiannau Llinol ar Ofodau Fector

4.1 Trawsffurfiannau Llinol

Gadawer i V a W fod yn ofodau-K.

Diffiniad 4.1 ***Gelwir mapiad*** $T : V \to W$ ***fel bod***

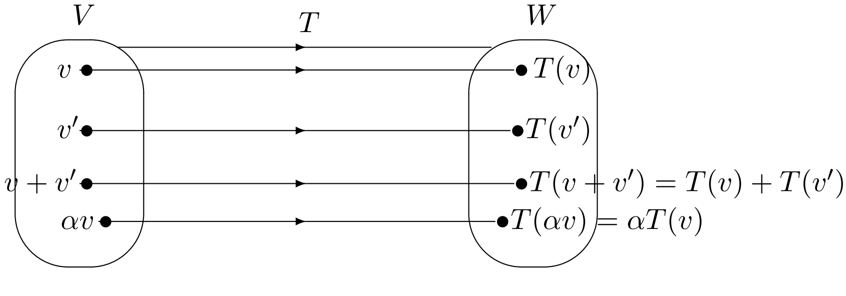
$$T(\alpha v + v') = \alpha T(v) + T(v')$$

am bob $\alpha \in K,\ v, v' \in V$***, yn*** **Drawsffurfiad llinol (homomorffedd-K)** T **o** V **i** W***. Neu, beth sy'n gywerth,***

$$\begin{array}{lcl} T(v + v') & = & T(v) + T(v') \\ T(\alpha v) & = & \alpha T(v) \end{array}$$

am bob $\alpha \in K,\ v, v' \in V$***. Os yw*** $W = V$***, gelwir*** T ***yn*** **drawsffurfiad llinol ar** V***.***

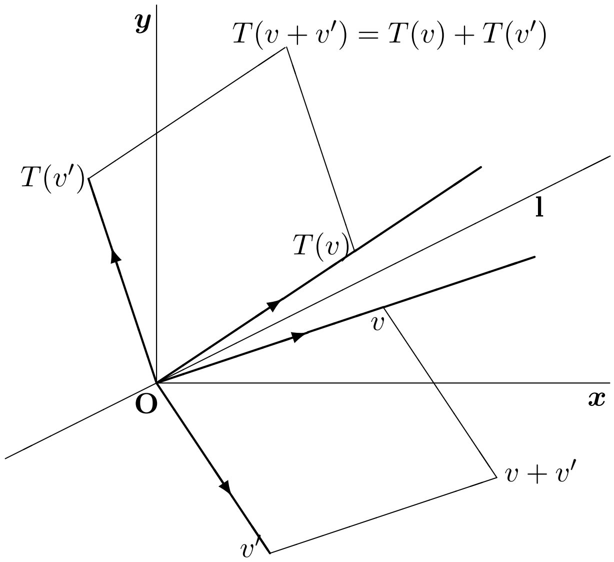
Yn ei hanfod felly, beth yw trawsffurfiad llinol o V i W ond mapiad o V i W sy'n parchu y ddau weithrediad sylfaenol o mewn i ofod fector, sef adio a lluosi sgalar gan elfen o K. Darlunir hyn yn y diagram canlynol



Dangosir yn yr enghreifftiau sy'n dilyn, pa mor eang yw'r cysyniad o drawsffurfiant llinol - fe ddengys y ddwy enghraifft gyntaf ei fod yn ehangu i ofodau fector yn gyffredinol drawsffurfiadau gwybyddus yn y plân $V_2(\mathbb{R})$, sef adlewyrchiad mewn llinell a cylchdroad o gwmpas pwynt drwy ongl sefydlog.

ENGHREIFFTIAU

1. **Gadawer i l fod yn linell trwy'r pwynt tardd O a gadawer i T fod y mapiad sy'n adlewyrchu pob fector yn y llinell l. Yna, gwelir yn y diagram isod fod T yn drawsffurfiant llinol.**



2. **Gadawer i R fod yn cylchdroad trwy ongl θ o gwmpas y pwynt tardd O. Yna gwelir yn y diagram isod fod R yn drawsffurfiad llinol.**

3. **Diffinnir $T : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ gan**

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3)$$

yna gwelir fod T yn drawsffufiant llinol o $V_3(\mathbb{R})$ i $V_2(\mathbb{R})$ o achos, os yw $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in V_3(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ yna mae

$$\begin{aligned}
T(\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) &= T(\alpha\alpha_1 + \beta_1, \alpha\alpha_2 + \beta_2, \alpha\alpha_3 + \beta_3) \\
&= (\alpha\alpha_1 + \beta_1 + \alpha\alpha_2 + \beta_2, \alpha\alpha_2 + \beta_2 - \alpha\alpha_3 - \beta_3) \\
&= \alpha(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3) + (\beta_1 + \beta_2, \beta_2 - \beta_3) \\
&= \alpha T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + T(\beta_1, \beta_2, \beta_3).
\end{aligned}$$

4. **Diffinnir $T : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ gan**

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + 1, \alpha_2)$$

yna gwelir nad yw T yn drawsffufiant llinol gan , er enghraifft, mae $T(1,0,0) = (2,0)$ a $T(2(1,0,0) = T(2,0,0) = (3,0)$, ac felly $T(2(1,0,0) \neq 2T(1,0,0) = (4,0)$.

5. **Gadawer i $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ fod y mapiad o ddifferu a ddiffinnir trwy fapio polynomial ar ei ddeilliad**

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1}.$$

Yna gwelir fod D yn drawsffurfiant llinol ar $P_n(\mathbb{R})$, gan, os yw $\alpha, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mae

$$\begin{aligned} & D(\alpha(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n)) \\ = \;& D((\alpha\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta_n)x^n) \\ = \;& (\alpha\alpha_1 + \beta_1) + 2(\alpha\alpha_2 + \beta_2)x + \cdots + n(\alpha\alpha_n + \beta_n)x^{n-1} \\ = \;& \alpha D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) + D(\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n). \end{aligned}$$

6. **Yn fwy cyffredinol, gadawer i D fapio ffwythiant differadwy di-dor ar $[a,b]$ ar ei ddeilliad, hynny yw, $D : C'[a,b] \to C[a,b]$ yw'r map deilliad. Yna, mae D yn drawsffurfiant llinol gan, os yw $\alpha \in \mathbb{R}, f_1, f_2 \in C'[a,b]$, yna mae**

$$\begin{aligned} D(f_1 + f_2) &= D(f_1) + D(f_2) \\ D(\alpha f_1) &= \alpha D(f_1) \end{aligned}$$

yn ail-adrodd canlyniadau amlwg am briodweddau deilliad o ffwythianau real a welir mewn unrhyw ragarweiniad i galcwlws neu analysis real (gweler, er enghraifft, KFOP)

7. **Mae'r broses o integreiddio ffwythiant real hefyd yn drawsffurfiant llinol; yn fwy manwl, os yw $f \in C[a,b]$, ac os diffinnir**

$$S(f) = \int_a^x f(t)dt$$

lle mae $a \leq x \leq b$, yna mae $S : C[a,b] \to C[a,b]$ ac mae

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= \int_a^x (f_1(t) + f_2(t))dt \\ &= \int_a^x f_1(t)dt + \int_a^x f_2(t)dt \\ &= S(f_1) + S(f_2) \end{aligned}$$

a thrwy ddadl gyffelyb ceir fod

$$S(\alpha f_1) = \alpha S(f_1)$$

am bob $f_1, f_2 \in C[a,b],\ \alpha \in \mathbb{R}$.

8. **Gadawer i M a N fod yn fatricsau $m \times m$ a $n \times n$ sefydlog yn ôl eu trefn. Os diffinnir $T : M_{m,n}(K) \to M_{m,n}(K)$ trwy osod $T(A) = MAN$ am bob $A \in M_{m,n}(K)$, yna am bob $A, B \in M_{m,n}(K)$ a $\alpha \in K$, ceir bod**

$$\begin{aligned} T(\alpha A + B) &= M(\alpha A + B)N \\ &= \alpha MAN + MBN \\ &= \alpha T(A) + T(B), \end{aligned}$$

hynny yw, mae T yn drawsffurfiant llinol ar $M_{m,n}(K)$.

9. **Os yw V a W yn ofodau-K, yna mae $I : V \to V$ a ddiffinnir gan $I(v) = v$, am bob $v \in V$ yn drawsffurfiant llinol ar V a elwir y trawsffurfiant unfathol. Hefyd, mae $0 : V \to W$ a ddiffinnir gan $0(v) = 0$ am bob $v \in V$ yn drawsffurfiant llinol o V i W a elwir y drawsffurfiant sero o V i W.**

SYLWADAU

1. **Gwelir fod $T(0) = 0$ gan fod $0 + 0 = 0$, a thrwy ddefnyddio diffiniad trawsffurfiant llinol ceir fod $T(0)+T(0) = T(0)$. Ond hefyd, mae $T(0)+0 = T(0)$, ac felly gan fod yr elfen sero mewn gofod-K yn unigryw, ceir bod $T(0) = 0$.**

2. **Os yw $v_i \in V, \alpha_i \in K,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, yna mae**

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i).$$

Mae'r canlyniad yn dilyn trwy ddefnyddio prawf anwythol ar ddiffiniad trawsffurfiant llinol.

Yn awr, profir theorem a fydd o gryn ddefnydd pan ddaw'n hanfodol sicrhau bod trawsffurfiant llinol yn bodoli gyda priodweddau arbennig.

Theorem 4.2 ***Gadawer i V a W fod yn ofodau-K lle mae V o ddimensiwn meidraidd n dros K. Os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn sylfaen-K i V ac $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ yn set sy'n cynnwys unrhyw n fector o W, yna bodola trawsffurfiant llinol unigryw o V i W fel bod $T(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.***

PRAWF Os yw $v \in V$, yna mae $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, lle mae $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yn unigryw. Diffinnir $T : V \to W$ trwy osod

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i.$$

(Mae T yn dda-ddiffyniedig gan fod $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yn unigryw.) Yna os yw $v, v' \in V$, $\alpha \in K$ a $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, lle mae $\alpha_i, \beta_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, yna mae

$$\begin{aligned} T(\alpha v + v') &= T(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i) v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i) w_i \\ &= \alpha T(v) + T(v'), \end{aligned}$$

ac felly, mae T yn drawsffurfiant llinol o V i W sy'n amlwg gyda'r priodwedd fod
$T(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

I brofi bod T yn unigryw gyda'r priodwedd yma, cymerer fod S hefyd yn drawsffurfiant llinol o V i W gyda'r un priodwedd sef bod $S(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Yna, os yw $v \in V$, a $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, lle mae $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, yna mae

$$S(v) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = T(v)$$

sy'n profi bod $S = T$, ac felly bod T yn unigryw.

Ymarferion 4.1

1. **Penderfynwch pa rai o'r mapiadau $T : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ canlynol sy'n drawsffurfiadau llinol**

   (i) $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha + \beta)$

   (ii) $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + 1, \alpha + 2\beta - \gamma)$

   (iii) $T(\alpha, \beta, \gamma) = (|\alpha|, 0)$

   (iv) $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\beta, \beta\alpha)$.

2. Penderfynwch pa rai o'r mapiadau $T : M_n(K) \to M_n(K)$ canlynol sy'n drawsffurfiadau llinol

(i) $T(A) = AS$**, lle mae** S **yn fatrics safadwy yn** $M_n(K)$

(ii) $T(A) = AS - SA$**, lle mae** S **yn fatrics safadwy yn** $M_n(K)$

(iii) $T(A) = A^t$

(iv) $T(A) = A^2$**.**

3. Penderfynwch a yw'r mapiadau $T : C'(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ canlynol yn drawsffurfiadau llinol a'i peidio

(i) $T(f(x)) = f'(x)$

(ii) $T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$

(iii) $T(f(x)) = f(x)f'(x)$

(iv) $T(f(x)) = xf(x)$

(iv) $T(f(x)) = f(x+1)$**.**

4. (i) Diffinnir $T : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ gan $T(f(x)) = f''(x) - 2f'(x) + 3$, dangoswch fod T yn drawsffurfiant llinol.

(ii) Os yw $a(x), b(x) \in C(\mathbb{R})$, diffinnir $T : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ gan $T(f(x)) = f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x)$, dangoswch fod T yn drawsffurfiant llinol.

4.2 Matrics Trawsffurfiad Llinol

Am bob $j = 1, 2, \ldots, n$, gadawer i V a W fod yn ofodau-K o ddimensiwm meidraidd gyda $(V : K) = n$ a $(W : K) = m$. Gadawer i $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ fod yn sylfaeni-K i V a W yn ôl eu trefn. Gan fod $Tv_j \in W$, felly mae

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i,$$

lle mae $\alpha_{ij} \in K$ yn unigryw. Gadawer i $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, yna gelwir A yn fatrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-K $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$; weithiau dynodir y matrics hwn fel ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}}$. Noder yn arbennig fod y cyfernodau sydd yn Tv_i yn rhoi'r elfennau sy'n y j-fed golofn o A.

I'r gwrthwyneb, os yw $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ ac os diffinnir $T_A : V \to W$ gan

$$T_A v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i \quad (j = 1, 2 \ldots, m),$$

yna trwy Theorem 4.2 ceir mai T_A yw'r trawsffurfiad llinol unigryw gyda'r priodwedd hwn. Felly, mae cyfatebiaeth un i un rhwng y set o drawsffurfiadau llinol o V i W a'r set o fatricsau $m \times n$ dros K.

Os yw T yn drawsffurfiant llinol ar V, yna dynodir ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ gan $(T)_{\mathcal{B}}$.

Ystyrier yn arbennig drawsffurfiant llinol T o $V_n(K)$ i $V_m(K)$. Os yw $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_n(K)$, yna rhodder $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in V_m(K)$. Os yw $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a $\mathcal{W} = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ yw sylfaeni-K safonol $V_n(K)$ a $V_m(K)$ yn ôl eu trefn ac ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}} = (\alpha_{ij})$, yna am bob $j = 1, 2, \ldots, n$ ceir bod

$$\begin{aligned} T(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e'_i \\ &= (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj} \end{aligned}$$

Felly, ceir bod

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \ldots, y_m) &= T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}), \end{aligned}$$

neu, mewn geiriau eraill

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Golyga hyn, os yw $T : V_n(K) \to V_m(K)$ yn drawsffurfiant llinol ac $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m.n}(K)$ yw matrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-K safonol i $V_n(K)$ a $V_m(K)$, yna mae

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \right). \tag{4.2.1}$$

I'r gwrthwyneb, os diffinnir $T : V_n(K) \to V_m(K)$ gan (4.2.1), yna gellir dangos yn weddol syml fod T yn drawsffurfiant llinol. Felly, mae'n rhaid i bob trawsffurfiant llinol o $V_n(K)$ i $V_m(K)$ gymeryd y ffurf hwn. Sylwer yn arbennig, os cyflwynir trawsffurfiant llinol yn y ffurf hwn, yna mae'r cydran i-fed o $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yn rhoi yr elfennau yn yr i-fed res o fatrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-K safonol i $V_n(K)$ a $V_m(K)$.

ENGHREIFFTIAU

1. **Diffinnir $T : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ gan**

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta - \gamma), 2\alpha + \gamma)$$

am bob $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Yna, trwy'r ddadl uchod, mae T yn drawsffurfiant llinol a matrics T mewn perthynas â sylfaeni-$\mathbb{R}$ safonol i $V_3(\mathbb{R})$ a $V_2(\mathbb{R})$ yw

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, gadawer i $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,1,1).v_3 = (1,0,0)\}$ a $\mathcal{W} = \{w_1 = (1,1), w_2 = (1,0)\}$ yna mae'n syml i ddangos fod $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ yn linol annibynnol ac felly yn sylfaeni-$\mathbb{R}$ i $V_3(\mathbb{R})$ a $V_2(\mathbb{R})$ yn ôl eu trefn. Hefyd gan fod

$$\begin{aligned} Tv_1 &= T(1,0,-1) = (2,1) = w_1 + w_2 \\ Tv_2 &= T(1,1,1) = (1,3) = 3w_1 - 2w_2 \\ Tv_3 &= T(1,0,0) = (1,2) = 2w_1 - w_2 \end{aligned}$$

ceir fod

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Gadawer i $R : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ ddynodi yr adlewyrchiad mewn llinell L trwy pwynt tardd O sydd ar oledd ϕ i'r echel-x. Darganfyddir yn awr fatrics R mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ safonol i'r ofod $V_2(\mathbb{R})$. I ddarganfod y matrics, rhaid cyfrifo $R(1,0)$ a $R(0,1)$. Trwy astudio y darlun isod gwelir bod**

$$\begin{aligned} R(1,0) &= (\cos 2\phi, \sin 2\phi) \\ R(0,1) &= (\sin 2\phi, -\cos 2\phi) \end{aligned}$$

ac felly y matrics yw

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}.$$

3. **Gadawer i $R : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ ddynodi y cylchdroad o amgylch y pwynt tardd O. Trwy astudio y darlun isod yn yr achos yma gwelir bod**

$$\begin{aligned} R(1,0) &= (\cos\theta, \sin\theta) \\ R(0,1) &= (-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

ac felly y matrics yw

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

4.3 Newid y Sylfaen

Yn yr enghraifft gyntaf uchod, gwelwyd fod matrics trawsffurfiad llinol yn dibynnu ar y dewis o sylfaen i ofod fector. Yn awr, ystyrir yn fanwl yr effaith a geir ar y matrics trwy newid y sylfaen-K.

Cyn symud ymlaen i brofi y prif ganlyniad profir y lemma ganlynol.

Lemma 4.3 ***Gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fod yn sylfaen-K i ofod fector V a $v'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, yna mae $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ yn llinol annibynnol os a dim ond os yw $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$ yn fatrics gwrthdro.***

PRAWF Ystyrier

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j v'_j = 0,$$

lle mae $\beta_j \in K\,(j = 1, 2, \ldots, n)$. Yna, mae

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \right) = 0,$$

hynny yw,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \right) v_i = 0.$$

Ond, mae $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn llinol annibynnol dros K ac felly, mae

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mae hwn yn system o n hafaliad homogenaidd mewn n newidyn, a thrwy ddefnyddio Canlyneb 2.10, gwyddir fod gan y system hwn ddatrysiad annistadl (ansero) os a dim ond os yw A yn fatrics hynod, hynny yw, mae $\det A = 0$. Felly, mae canlyniad y lemma yn dilyn.

Hefyd, o'r prawf yma, ceir y canlyniad sy'n dilyn

Canlyneb 4.4 ***Mae matrics A yn wrthdro os a dim ond os yw ei golofnau (rhesi) yn llinol annibynnol dros K.***

Yn awr, dangosir y berthynas echblyg rhwng matricsau trawsffurfiant llinol mewn perthynas a dau sylfaen i'r gofod fector.

Fel y gwelwyd ar ddechrau §4.2, mae V a W yn ofodau-K o ddimensiwm meidraidd gyda $(V : K) = n$ a $(W : K) = m$. Gadawer i $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ fod yn sylfaeni-K i V a W yn ôl eu trefn a gadawer i ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}} = A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ fod yn fatrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-K $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$, hynny yw, mae

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).'$$

Yn awr, gadawer i $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ a $\mathcal{W}' = \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_m\}$ hefyd fod yn sylfaeni-K i V a W yn ôl eu trefn a gadawer i ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{W}'} = B = (\beta_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ fod yn fatrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-K $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{W}'$, hynny yw, mae

$$Tv'_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w'_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Yn awr, mae $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ yn sylfaeni-K i V, a thrwy Theorem 4.2 bodola trawsffurfiant llinol P ar V fel bod $Pv_j = v'_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$. Yn yr un modd, bodola

trawsffurfiant llinol Q ar W fel bod $Qw_j = w'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Gadawer i $C = (\gamma_{ij}) \in M_n(K)$ a $D = (\delta_{ij}) \in M_m(K)$ sefyll am fatricsau P a Q mewn perthynas â'r sylfaeni-K $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ yn ôl eu trefn; hynny yw,

$$v'_j = Pv_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

a

$$w'_j = Qw_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij} w_i \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Yna, am bob $j = 1, 2, \ldots, n$, ceir bod

$$\begin{aligned} Tv'_j &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w'_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{ki} w_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} \beta_{ij} \right) w_k, \end{aligned}$$

neu, fel arall

$$\begin{aligned} Tv'_j &= T \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} w_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \gamma_{ij} \right) w_k. \end{aligned}$$

O gymharu y ddau ffurf yma o fatrics o T mewn perthynas â'r sylfaeni-K $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{W}$, ceir bod

$$_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{W}} = DB = AC.$$

Trwy ddefnyddio Lemma 4.3 a brofwyd uchod, gwelir bod C a D yn fatricsau gwrthdro, ac felly ceir bod

$$B = D^{-1}AC.$$

Felly, profwyd y theorem ganlynol

Theorem 4.5 ***Gadawer i T fod yn drawsffurfiant llinol o'r gofod-K V i'r gofod-K W. Os yw $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ yn sylfaeni-K i V a $\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}'$ yn sylfaeni-K i W, yna mae***

$$_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{W}'} = (Q)^{-1}_{\mathcal{W}\ \mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}}(P)_{\mathcal{B}},$$

lle mae P yw'r trawsffurfiant llinol unigryw sy'n mapio $\mathcal{B}$ ar $\mathcal{B}'$ a Q yw'r trawsffurfiant llinol unigryw sy'n mapio $\mathcal{W}$ ar $\mathcal{W}'$.

Darlunir y theorem hon trwy ei chymhwyso i'r Engraifft 1 uchod. gan ddefnyddio nodiant yr enghraifft hwn, ceir

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{W}'} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

sy'n cydymffurfio gyda'r canlyniad a brofwyd uchod.

Ystyrir yn awr yr achos arbennig lle mae T yn drawsffurfiant llinol ar V yn fwy manwl. Yn yr achos yma, gadawer i'r sylfaeni-K $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ fod yn hafal ac hefyd y sylfaeni-K $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{W}'$. Golyga hyn bod $D = C$, ac felly mae

$$(T)_{\mathcal{B}'} = C^{-1}(T)_{\mathcal{B}}C.$$

Rhoddir enw arbennig i fatricsau sy'n perthyn yn y ffordd yma.

Diffiniad 4.6 ***Os yw $A, B \in M_n(K)$, yna dywedir bod B yn*** **gyflun** ***i A os bodola matrics gwrthdro $C \in M_n(K)$ fel bod***

$$B = C^{-1}AC.$$

Yn wir, beth a brofwyd uchod yw os mai A a B yw matricsau T mewn perthynas a rhyw sylfaeni-K i V, yna mae A a B yn gyflun. Gellir profi y gwrthdro i hyn hefyd fel y gwelir yn y theorem ganlynol.

Theorem 4.7 ***Gadawer i $A, B \in M_n(K)$, yna mae A a B yn gyflun os a dim ond os y maent yn cynrychioli yr un trawsffurfiant llinol ar ofod fector V gyda dimensiwn n mewn perthynas a sylfaeni-K i V o ddewisiad addas.***

PRAWF Os yw A a B yn fatricsau cyflun, yna trwy Ddiffiniad 4.6 gwelir bodola matrics wrthdro $C \in M_n(K)$ fel bod $B = C^{-1}AC$. Gadawer i V fod yn ofod-K o ddimensiwn n gyda sylfaen-K $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a gadawer i T fod yn drawsffurfiant llinol ar V a ddiffinnir gan

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Am bob $j = 1, 2, \ldots, n$, gadawer i

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i,$$

lle mae $C = (\gamma_{ij})$ a $C^{-1} = (\gamma'_{ij})$. Yna, trwy Lemma 4.3 , gan fod C yn wrthdro, mae $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ hefyd yn sylfaen-K i V. Ymhellach, am bob $j = 1, 2, \ldots, n$, ceir bod

$$\begin{aligned} Tv'_j &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\gamma_{ij}\right) v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\gamma_{ij}\right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} \gamma'_{\ell k} v'_\ell\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma'_{\ell k}\alpha_{ki}\gamma_{ij}\right) v'_\ell \end{aligned}$$

Felly, matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-K $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ i V yw $C^{-1}AC = B$. Mae hyn yn cwblhau y prawf gan fod prawf y gwrthwyneb wedi ei gyflwyno cyn mynegiad Theorem 4.7.

ENGHRAIFFT

Gadawer i $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ fod yn sylfaen-K i'r ofod fector 3-dimensiwn V a gadawer i

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

fod yn fatrics i drawsffurfiant llinol ar V mewn perthynas â'r sylfaen hwn. Cyfrifir yn awr matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-K $\mathcal{B}' = \{u+v, u-2v+w, v-w\}$.

Trwy ddefnyddio y theorem uchod, gwelir bod

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a gan ddefnyddio'r dulliau a gyflwynwyd yn §1.6, gellir darganfod y gwrthdro o'r matrics hwn i roi

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Felly, trwy ddefnyddio Theorem 4.7 uchod ceir matrics T mewn perthynas

â'r sylfaen-K $\mathcal{B}'$, sef

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -7 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ymarferion 4.3

1. **Gadawer i T fod yn drawsffurfiant llinol ar $V_3(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan**

$$T(x,y,z) = (x-y, x+2y-z, 2x+y+z).$$

Darganfyddwch matrics T mewn perthynas â'r (i) sylfaen safonol i $V_3(\mathbb{R})$ (ii) sylfaen-$\mathbb{R}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$, lle mae $v_1 = (1,0,1), v_2 = (-2,1,1), v_3 = (1,-1,1)$.

2. **Matrics y trawsffurfiant llinol T ar $V_3(\mathbb{R})$ a mewn perthynas â'r (i) sylfaen safonol yw**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darganfyddwch matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$, lle mae $v_1 = (1,0,1), v_2 = (-2,1,1), v_3 = (1,-1,1)$.

3. **Darganfyddwch matrics y trawsffurfiannau llinol T ar $P_n(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan**
(a) $T(f(x)) = f'(x)$ (b) $T(f(x)) = f(x+1)$, mewn perthynas â'r sylfaeni-$\mathbb{R}$ canlynol (i) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, (ii) $\{1, x-1, (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n\}$, (iii) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+x^2+\cdots+x^n\}$.

4. **Os yw S yn fatrics sefydlog yn $M_2(\mathbb{R})$, darganfyddwch matrics y trawsffurfiannau llinol T canlynol ar $M_2(\mathbb{R})$ mewn perthynas â'r sylfaen -$\mathbb{R}$ safonol $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$,**

   (i) $TA = SA$
   (ii) $TA = AS$
   (iii) $TA = SA - AS$

5. **Os yw $\{u_1, u_2\}$ a $\{v_1, v_2, v_3\}$ yn sylfaeni-$\mathbb{R}$ i $V_2(\mathbb{R})$ a $V_3(\mathbb{R})$ yn ôl eu trefn ac os yw T yn drawsffurfiant llinol o $V_2(\mathbb{R})$ i $V_3(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan**

$$\begin{aligned} Tu_1 &= v_1 + 2v_2 - v_3 \\ Tu_2 &= v_1 - v_2 \end{aligned}$$

darganfyddwch matrics T mewn perthynas â'r sylfaeni hyn. Hefyd, darganfyddwch matrics T mewn perthynas â'r sylfaeni-$\mathbb{R}$ $\{-u_1+u_2, 2u_1-u_2\}$ a $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ i $V_2(\mathbb{R})$ a $V_3(\mathbb{R})$ yn ôl eu trefn. Beth yw'r berthynas rhwng y ddau fatrics?

6. **Os yw U a V yn ofodau-K o ddimensiwn 3 a $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\mathcal{W} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ac**

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix},$$

darganfyddwch $_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{W}}$, lle mae $\mathcal{B}' = \{u_1 + u_2 + u_3, u_2 + (\lambda + 1)u_3, u_3\}$. Felly, neu fel arall, darganfyddwch werthoedd λ a μ fel bod gan y system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & \mu z & = & 2 \\ x & + & \lambda^2 y & + & \mu^2 z & = & 4 \end{array}$$

(i) ddatrysiad unigryw (ii) fwy nag un datrysiad.

7. **Darganfyddwch sylfaen-$\mathbb{R}$ i'r ofod fector o'r holl bolynomialau cwadratig homogenaidd real mewn tri amhenderfynun x, y a z. Dangoswch fod y mapiad sy'n mynd â'r polynomial $f(x, y, z)$ i $f(\alpha x + y + z, \beta y + \gamma z, 0)$ yn drawsffurfiant llinol a darganfyddwch ei fatrics mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ hwn.**

8. **Gadawer i U fod yr ofod fector o'r holl bolynomialau cwadratig real mewn dau amhenderfynun x a y a gadawer i V sefyll am yr ofod fector o'r holl bolynomialau ciwbig real mewn un amhenderfynun x. Darganfyddwch sylfaeni-$\mathbb{R}$ i U a V. Diffinnir $T : U \to V$ gan $T(f(x, y)) = f(x, 2)$. Dangoswch fod T yn drawsffurfiant llinol a darganfyddwch ei fatrics mewn perthynas â'r sylfaeni-$\mathbb{R}$ uchod i U a V.**

4.4 Cnewyllyn a Delwedd Trawsffurfiant Llinol

Gadawer i V a W fod yn ofodau-K a T yn drawsffurfiant llinol o V i W. Cyflwynir yn awr ddau isofod o V a W sydd o gryn bwys yn natblygiad y pwnc. Gadawer i

$$\ker T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$$

ac

$$\textbf{im}\, T = \{Tv \mid v \in V\}.$$

Yna gellir profi y canlynol.

Lemma 4.8 ***Mae***

(i) $\ker T$ ***yn isofod o*** V

(ii) ***im*** T ***yn isofod o*** W.

PRAWF (i) Mae $\ker T$ yn anwag gan fod $0 \in \ker T$, hynny yw, mae $T(0) = 0$. Os yw $v, v' \in \ker T$ a $\alpha \in K$, yna mae $T(v) = T(v') = 0$, ac felly mae $T(\alpha v + v') = \alpha T(v) + T(v') = \alpha 0 + 0 = 0$, hynny yw, mae $\alpha v + v' \in \ker T$, sy'n profi bod $\ker T$ yn isofod o V.

(ii) Mae im T yn anwag gan fod $0 = T(0) \in$ im T. Os yw $w, w' \in$ im T, $\alpha \in K$ yna mae $w = T(v), w' = T(v')$ am rhyw $v, v' \in V$, ac felly mae

$$\begin{aligned} \alpha w + w' &= \alpha T(v) + T(v') \\ &= T(\alpha v + v'), \end{aligned}$$

lle mae $\alpha v + v' \in V$, hynny yw, mae $\alpha w + w' \in$ im T ac mae im T yn isofod o W.

Os yw V a W yn ofodau fector o ddimensiwn meidraidd, yna mae $\ker T$ a im T hefyd o ddimensiwn meidraidd sy'n arwain i'r diffiniad canlynol

Diffiniad 4.9 ***nwliti*** $T = (\ker T : K)$***, ranc*** $T = ($***im*** $T : K)$***.***

Ond fel a welir yn y theorem ganolog ganlynol, nid yw'r ddau rif yma sy'n perthyn i'r trawsffurfiant llinol T yn annibynnol o'u gilydd.

Theorem 4.10 ***Os yw V a W yn ofodau fector o ddimensiwn meidraidd dros K, a T yn drawsffurfiant llinol o V i W, yna mae***

$$\textbf{\textit{nwliti}}\, T + \textbf{\textit{ranc}}\, T = (V : K).$$

PRAWF Cymerer bod nwliti $T = r$ a gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ yn sylfaen-K i $\ker T$. Trwy Theorem 3.19 , gellir ymestyn y sylfaen-K hwn i $\ker T$ i roi sylfaen-K $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ i V, os yw $(V : K) = n$. O ddiffiniad im T mae'n eglur bod $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ yn generadu im T dros K. Ond mae $T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_r) = 0$ gan fod $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \ker T$. Golyga hyn bod $\{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ yn generadu im T dros K. Hefyd, mae'r set yma yn llinol annibynnol dros K, oherwydd os yw

$$\alpha_{r+1}T(v_{r+1}) + \alpha_{r+2}T(v_{r+2}) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0,$$

yna mae

$$T(\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0,$$

ac felly bod $\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in \ker T$. Ond mae $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ yn sylfaen-K i $\ker T$ sy'n golygu fod

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_r v_r$$

am rhyw $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in K$. Mewn geiriau eraill, mae

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_r v_r - \alpha_{r+1}v_{r+1} - \alpha_{r+2}v_{r+2} - \cdots - \alpha_n v_n = 0.$$

Ond gan bod $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ yn sylfaen-K i V ac felly yn llinol annibynnol, yn arbennig, mae'n dilyn bod $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$ a bod $\{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ yn llinol annibynnol dros K. Felly, mae (im $T : K) = n - r$ sy'n ategu datganiad y theorem, hynny yw $r + (n - r) = n$.

ENGHREIFFTIAU

1. Diffinnir $T : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ gan

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3),$$

sy'n drawsffurfiant llinol ar $V_3(\mathbb{R})$. Yn awr, darganfyddir sylfaeni-$\mathbb{R}$ i $\ker T$ **ac**
im T. Ceir bod

$$\begin{aligned} \textbf{im } T = \{T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \alpha_1 T(1,0,0) + \alpha_2 T(0,1,0) + \alpha_3 T(0,0,1) \\ &= \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(2,0,-2) + \alpha_3(-1,1,2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Felly, mae $\{(1,2,1),(2,0,-2),(-1,1,2)\}$ yn generadu im T dros $\mathbb{R}$. Gan bod

$$(-1,1,2) = \frac{1}{2}(1,2,1) - \frac{3}{4}(2,0,-2)$$

a gan ei bod yn amlwg bod $\{(1,2,1),(2,0,-2)\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, mae'n dilyn bod $\{(1,2,1),(2,0,-2)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i im T a bod ranc $T = 2$. Trwy'r theorem uchod, ceir bod nwliti $T = (V_3(\mathbb{R}) : \mathbb{R}) - 2 = 1$. Yn awr, mae
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \ker T$ **os a dim ond os yw**

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \; . \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Ond gan bod

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gwelir fod y system yn gostwng i neu yn gywerth â

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}\alpha_3,$$

neu, mewn geiriau eraill

$$\ker T = \{\alpha_3(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1) \mid \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

ac mae $\{(-2,3,4)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $\ker T$.

2. Diffinnir $T : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ gan

$$T(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + y, \quad y \in C^2(\mathbb{R}).$$

Gellir profi yn weddol hawdd bod T yn drawsffurfiant llinol. Yn awr mae

$$\begin{aligned}\ker T &= \{y \in C^2(\mathbb{R}) \mid T(y) = 0\} \\ &= \{y \in C^2(\mathbb{R}) \mid \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0\},\end{aligned}$$

hynny yw, $\ker T$ **yw gofod datrysiad o'r hafaliad differol**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

a gyfrifwyd yn Enghraifft 9 ar ddiwedd §3.4. Hynny yw, mae $\{\sin x, \cos x\}$ **yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i** $\ker T$**.**

3. **Diffinnir** $T : V_4(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ **gan**

$$T(x, y, z, w) = AX$$

lle mae $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X^t = (x, y, z, w)$**, yna mae**

$$\ker T = \{(x, y, z, w) \mid AX = 0\}.$$

O edrych yn ôl ar Enghraifft 8 ar ddiwedd §3.4, gwelir felly mai $\ker T$ **yw gofod datrysiad y system o hafaliadau llinol**

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & w & = & 0. \end{array}$$

Yno, dangoswyd mai'r gofod datrysiad yw $\langle(-1, 7, 5, 0), (-1, -3, 0, 5)\rangle$ **sydd hefyd yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i'r ofod.**

Datblygir ymhellach y syniadau a gyflwynwyd yn yr adran hon ac a ddarluniwyd yn yr enghraifft olaf yn achos y datrysiad o hafaliadau llinol yn adran olaf y bennod hon. Am drafodaeth gymharol yn achos hafaliadau differol llinol gweler KFOP (loc. cit.).

Ymarferion 4.4

1. **Gadawer i** $T : V_4(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ **fod y trawsffurfiad llinol a ddiffinnir gan**

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_2 - 2\alpha_3).$$

Darganfyddwch sylfaen-$\mathbb{R}$ i $\ker T$ **a im** T**.**

2. **Darganfyddwch ranc a nwliti y trawsffurfiant llinol** T **o** $V_4(\mathbb{R})$ **i** $V_3(\mathbb{R})$ **sydd a matrics mewn perthynas â'r sylfaen safonol**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Darganfyddwch $\ker T$ ac im T ym mhob achos a ddiffinwyd yn Ymarferion 4.1, Engraifft 1.

4. Darganfyddwch ranc a nwliti y trawsffurfiant llinol T o $V_4(\mathbb{R})$ i $V_3(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4, -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 4\alpha_4).$$

Dangoswch fod $(1, 3, k)$ yn im T os a dim ond os yw $k = 5$. Darganfyddwch y telerau fel bod $(1, x, 1, y) \in \ker T$.

5. Gadawer i V ddynodi yr ofod fector real o bolynomialau $f(x, y)$ gyda cyfernodau real o radd dim mwy nag n mewn dau newidyn x a y. Dangoswch fod y ddau fapiad S a T a ddiffinnir gan

$$S(f(x,y)) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \ T(f(x,y)) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

yn drawsffurfianau llinol ar V. Darganfyddwch gnewyllyn a delwedd S a T. Darganfyddwch sylfaen-$\mathbb{R}$ V a darganfyddwch fatricsau S a T mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ hwn.

6. Gadawer i V ddynodi yr ofod fector o ffwythiannau real sydd a deilliadau o bob trefn. Os D yw'r deilliad, darganfyddwch

$$(i)\ \ker D \quad (ii)\ \ker D^n\ (n \geq 1) \quad (iii)\ \ker(D-1).$$

7. Darganfyddwch sylfaeni-$\mathbb{R}$ i $\ker T$ a im T am bob un o'r trawsffurfiannau a ddiffinwyd yn Ymarferion 4.3, Rhif 4, lle mae $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Os yw T yn dynodi y trawsffurfiant llinol o'r ofod fector V i'r ofod fector W, dangoswch fod elfennau V sy'n cael eu mapio i isofod U o W yn ffurfio isofod X o V. Os mai dimensiynau V, W, U a X yw m, n, p, q yn ôl eu trefn, ac os mai n yw ranc T, darganfyddwch y berthynas rhwng m, n, p a q.

9. Gadawer i V ddynodi gofod-K o ddimensiwn n ac S a T i ddynodi trawsffurfiannau llinol ar V, profwch fod

$$\textbf{nwliti}(ST) \leq \textbf{nwliti}\, S + \textbf{nwliti}\, T.$$

Os yw $S^n = 0$, ond bod $S^{n-1} \neq 0$, darganfyddwch nwliti S.

10. Os yw $S : V \to W$ a $T : W \to V$ yn drawsffurfiannau llinol, profwch bod

$$\textbf{ranc}\, T - \textbf{ranc}\, ST \leq (V : K) - \textbf{ranc}\, S.$$

11. Darganfyddwch drawsffurfiant llinol T ar rhyw ofod fector V fel bod $\ker T = \textbf{im}\, T$. A ellir gwneud hyn i bob gofod fector?

12. **Os yw V yn ofod-K, profwch fod $\mathbf{im}\, T \cap \ker T = \{0\}$ os a dim ond os yw $T(Tv) = 0$ yn golygu bod $Tv = 0$, lle mae $v \in V$.**

13. **Os yw T yn drawsffurfiant llinol ar ofod fector V fel bod $\mathbf{ranc}\, T^2 = \mathbf{ranc}\, T$, yna dangoswch bod $\mathbf{im}\, T \cap \ker T = \{0\}$.**

14. **Os yw T yn drawsffurfiant llinol ar ofod fector V fel bod $T^2 = T$, profwch**

- **(i)** $\ker T = \mathbf{im}\,(I - T)$, $\ker(I - T) = \mathbf{im}\, T$
- **(ii)** $\ker T \cap \mathbf{im}\, T = \{0\}$
- **(iii)** **y gellir mynegi pob $v \in V$ mewn ffordd unigryw yn y ffurf $v = v_1 + v_2$, lle mae $v_1 \in \ker T$, $v_2 \in \mathbf{im}\, T$.**

4.5 Isomorffeddau-K a Trawsffurfiadau Llinol Anhynod

Cysylltir y syniadau hyn yn awr gyda cysyniadau pwysig eraill yn algebra, sef isomorffeddau-K a trawsffurfiadau llinol anhynod neu wrthdro.

Diffiniad 4.11 ***Gelwir trawsffurfiad llinol (homomorffedd-K) $T : V \to W$ yn***

(i) **isomorffedd-K** ***os yw T yn fapiad ddeudrawol, hynny yw, mae T yn undrawol (mae $Tv = Tv'$ yn golygu bod $v = v'$) ac mae T yn ardrawol (os yw $w \in W$ yna bodola $v \in V$ fel bod $Tv = w$)***

(ii) **drawsffurfiad anhynod** ***os yw $\ker T = \{0\}$.***

Gadawer i $T : V \to W$ a $S : W \to U$ fod yn isomorffeddau-K lle mae V, W a U yn ofodau-K, yna mae $ST : V \to U$ a ddiffinnir gan $ST(v) = S(T(v))$ am bob $v \in V$ yn ddaudrawol, ac hefyd mae yn drawsffurfiant llinol gan fod

$$\begin{aligned}(ST)(\alpha v + v') &= S(T(\alpha v + v')) \\ &= S(\alpha T(v) + T(v')) \\ &= \alpha S(T(v)) + S(T(v')) \\ &= \alpha ST(v) + ST(v')\end{aligned}$$

am bob $v, v' \in V$, $\alpha \in K$.

Os yw T yn isomorffedd-K o V i W, yna gan fod T yn fapiad ddaudrawol, mae'r mapiad $T^{-1} : W \to V$ hefyd yn ddaudrawol ac mae hefyd yn drawsffurfiant llinol o W i V, gan os yw $w_1, w_2 \in W$, $\alpha \in K$, yna mae $w_1 = Tv_1, w_2 = Tv_2$ am rhyw elfennau unigryw $v_1, v_2 \in V$, ac felly

$$\begin{aligned}T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) &= T^{-1}(\alpha T v_1 + T v_2) \\ &= T^{-1}T(\alpha v_1 + v_2) \\ &= \alpha v_1 + v_2 \\ &= \alpha T^{-1} w_1 + T^{-1} w_2.\end{aligned}$$

Felly, mae T yn drawsffurfiant llinol gwrthdro. I'r gwrthyneb, os yw T yn drawsffurfiant llinol gwrthdro, yna mae T yn isomorffedd-K ac felly mae'r ddau gysyniad yn gywerth.

Dangosir yn awr, os yw dau ofod-K V a W o ddimensiwn meidradd a'u bod o'r un dimensiwn, yna mae'r cysyniadau o drawsffurfiannau llinol gwrthdro a anhynod yn gywerth. Yn wir, dangosir eu bod yn gywerth â nifer o fynegiadau eraill.

Theorem 4.12 *Gadawer i V a W fod yn ofodau-K o ddimensiwn meidraidd gyda*
$(V : K) = (W : K) = n$ *a T yn drawsffurfiant llinol o V i W. Yna, mae'r mynegiadau canlynol yn gywerth*

(i) *mae T yn isomorffedd-K,*

(ii) *mae T yn wrthdro,*

(iii) *mae T yn undrawol,*

(iv) *mae T yn anhynod,*

(v) *mae ranc $T = n$,*

(vi) *mae T yn ardrawol,*

(vii) *os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn sylfaen-K i V, yna mae $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ yn sylfaen-K i W.*

PRAWF Yn y prawf, dangoswn fod $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (i)$, sy'n dangos fod y mynegiadau yn gywerth a'u gilydd.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Profwyd hyn uchod.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Mae hyn yn wir am fapiadau yn gyffredinol.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Gadawer i $v \in \ker T$, yna mae $T(v) = 0 = T(0)$ a gan fod T yn undrawol, ceir bod $v = 0$ ac felly $\ker T = \{0\}$ ac mae T yn anhynod.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Os yw T yn anhynod, mae $\ker T = \{0\}$ ac ac mae nwliti $T = 0$. Trwy ddefnyddio Theorem 4.10, ceir bod ranc $T = (V : K) = n$.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Trwy Lemma 4.8, mae im T yn isofod o W. Os yw ranc $T = n = (V : K)$ yna mae im $T = W$ ac felly mae T yn ardrawol.

$(vi) \Rightarrow (vii)$ Os yw T yn ardrawol, yna os yw $w \in W$ bodola $v \in V$ fel bod $T(v) = w$. Os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn sylfaen-K i V, yna mae $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in K\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ ac mae $w = T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)$, hynny yw, mae $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ yn generadu W. Trwy Ganlyneb 3.20 mae hefyd yn sylfaen-K i W.

$(vii) \Rightarrow (i)$ Gadawer i $v, v' \in V$ fel bod $T(v) = T(v')$. Mae $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, $\alpha_i, \beta_i \in K(i = 1, 2, \ldots, n)$ ac felly mae $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) T(v_i) = 0$. Ond mae $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ yn sylfaen-K i W ac felly mae $\alpha_i = \beta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, hynny yw mae $v = v'$ ac felly mae T yn undrawol. Yn awr, gadawer i $w \in W$,

yna mae $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, neu $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = w$ gyda $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ ac mae T yn ardrawol. Hynny yw, mae T yn isomorffedd-K.

Yn arbennig, nodir os yw T yn drawsffurfiant llinol ar ofod fector V o ddimensiwn meidraidd yna mae'r cysyniadau o isomorffedd-K, trawsffurfiant llinol gwrthdro a trawsffurfiant llinol anhynod yn gywerth. Hefyd, i brofi bod trawsffurfiant llinol yn wrthdro nid oes ond angen gwirio ei fod yntau yn undrawol neu yn ardrawol.

Profir yn awr ddau ganlyniad defnyddiol sy'n ymwneud â trawsffurfiannau llinol anhynod.

Theorem 4.13 ***Os yw V yn ofod-K o ddimensiwn meidraidd ac S a T yn drawsffurfiannau llinol ar V lle mae T yn anhynod, yna mae***

$$\textbf{\textit{ranc}}\,(TS) = \textbf{\textit{ranc}}\,S = \textbf{\textit{ranc}}\,(ST).$$

PRAWF. Os yw $v \in$ im$\,(ST)$ yna mae $v = (ST)(v') = S(T(v'))$ am rhyw $v' \in V$, hynny yw, mae $v \in$ im$\,S$ ac felly mae im$\,(ST) \subseteq$ im$\,S$. I'r gwrthwyneb, os yw $v \in$ im$\,S$, yna mae $v = S(v')$ am rhyw $v' \in V$. Ond, mae T yn anhynod ac felly, yn arbennig, yn ardrawol. Felly, bodola $v'' \in V$ fel bod $T(v'') = v'$, hynny yw, $v = ST(v'')$, $v \in$ im$\,ST$ ac mae ranc S = ranc ST.

Yn awr, os yw $v \in \ker S$, yna mae $S(v) = 0$ ac felly, mae $TS(v) = 0$, hynny yw, mae $v \in \ker TS$ ac mae $\ker S \subseteq \ker TS$. Os yw, $v \in \ker TS$ yna mae$(TS)(v) = 0$; ond mae T yn drawsffurfiad llinol anhynod, ac felly mae $S(v) = 0$ sy'n golygu bod $v \in \ker S$, hynny yw, mae $\ker S \subseteq \ker TS$.

Felly, ceir bod nwliti (TS) = nwliti (S) a thrwy Theorem 4.10, mae'n dilyn bod ranc TS = ranc S fel sydd ei angen.

Theorem 4.14 ***Os yw S a T yn drwasffurfiannau llinol ar ofod-K o ddimensiwn meidraidd, yna mae ST yn anhynod os a dim ond os yw S a T yn anhynod. Os yw ST yn anhynod, yna mae $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.***

PRAWF. Os yw ST yn anhynod, yna mae $\ker ST = \{0\}$. Ond mae $\ker T \subseteq \ker ST$, felly mae $\ker T = \{0\}$ ac mae T yn anhynod. Trwy Theorem 4.13, mae'n dilyn fod

$$\textbf{ranc}\,(ST) = \textbf{ranc}\,S = (V : K)$$

a thrwy Theorem 4.12 ceir bod S yn anhynod.

Os yw S a T yn anhynod, yna trwy Theorem 4.13 mae

$$\textbf{ranc}\,(ST) = \textbf{ranc}\,S = (V : K)$$

a thrwy Theorem 4.12, mae ST yn anhynod.

Os yw ST yn anhynod, yna mae gan ST wrthdro unigryw $(ST)^{-1}$, hynny yw, $(ST)(ST)^{-1} = I_V$. Ond hefyd, gwelir bod

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = I_V$$

ac felly, mae $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Mae'r cysyniad o isomorffedd-K yn ddigon pwysig i'w drafod ymhellach. Os yw $T : V \to W$ yn isomorffedd-K, yna gwelwyd uchod bod $T^{-1} : W \to V$ hefyd yn isomorffedd-K. Yn wir, mae isomorffedd-K yn berthynas cywerthedd ar y set o'r holl ofodau-K. Mae'n glir bod $I_V : V \to V$ yn isomorffedd-K ac os yw $T : V \to W$ a $S : W \to U$ yn isomorffeddau-K mae $ST : V \to U$ yn isomorffedd-K. Yn y sefyllfa yma dywedir bod V a W yn isomorffig-K a dynodir hyn gan $V \cong W$. Ystyrir gofodau-K sy'n isomorffig-K i fod yn hafal, yn hollol gywerth, er gall y setiau eu hunain fod yn hollol wahanol yn ei natur gyda elfennau gwahanol ac operadau gwahanol. Hynny yw, yn weithredol ni wahaniaethir rhyngddynt. Er engraifft, efallai bod y darllenydd wedi sylwi bod y tri gofod-$\mathbb{R}$ (i) $V_4(\mathbb{R})$ (ii) $P_3(\mathbb{R})$, yr ofod-$\mathbb{R}$ o bolynomoliau real o radd ≤ 3 a (iii) $M_2(\mathbb{R})$ yn y bôn, er gydag elfennau gwahanol eu natur, yn weithredol yr un fath.

Mae'n hawdd profi yr isomorffeddau hyn. Mae'r mapiad

$$T : P_3(\mathbb{R})) \to V_4(\mathbb{R})$$

a ddiffinnir gan

$$T(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

yn isomorffedd-$\mathbb{R}$, ac hefyd mae'r mapiad

$$S : M_2(\mathbb{R})) \to V_4(\mathbb{R})$$

a ddiffinnir gan

$$S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

yn isomorffedd-$\mathbb{R}$.

Ni roddir y manylion am yr enghreifftiau hyn gan bod canlyniad y theorem sy'n dilyn yn gyffredinol wir a sydd gan brawf gwir syml.

Theorem 4.15 ***Os yw*** V ***yn ofod-***K ***o ddimensiwn meidraidd*** n***, yna mae*** $V \cong V_n(K)$.

PRAWF. Os yw $(V : K) = n$, gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fod yn sylfaen-K i V. Os yw $v \in V$ yna mae $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, lle mae $\alpha_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yn unigryw. Yna mae $T : V \to V_n(K)$ a ddiffinnir gan

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

yn fapiad diamwys a gellir dangos yn hawdd ei fod yn drawsffurfiant llinol dros K. Mae'n glir fod T yn fapiad ardrawol a gan fod $(V : K) = (V_n(K) : K) = n$, mae'n dilyn trwy Theorem 4.12 fod T yn isomorffedd-K.

Mae hwn yn ganlyniad cryf iawn - pe bae'r bwriad oedd dosbarthu pob gofod fector o ddimensiwn meidraidd dros faes K, yna beth a brofwyd yw, mai i bob pwrpas y gofod fector $V_n(K)$ yw, am rhyw integryn positif n. Mae hyn yn awgrymu nad oes ond angen ystyried gofod fector 'concrit' fel $V_n(K)$. Ond, nid yw hynny bob amser yn wir, weithiau mae'n fwy manteisiol i weithredu ar y lefel mwy haniaethol - er engraifft, mae'n bosibl profi rhai canlyniadau mewn modd syml a choeth na fyddai'n amlwg ar yr olwg cyntaf wrth drin ar y lefel goncrit. Gall y wybodaeth manwl ac esblyg, sydd weithiau ar gael mewn gofodau fector megis y rhai sy'n cynnwys, fectorau, matricsau neu polynomialau yn gallu ein dallu rhag gweld yr ychydig wybodaeth sy'n angenrheidiol i ddarganfod y prawf mwyaf syml ac effeithiol i ganlyniad arbennig. Ond, fel sy'n nodweddiadol o ddatblygiadau mewn mathemateg yn gyffredinol, daw y datblygiadau trwy ymelwa ar y rhyngweithredu rhwng yr haniaethol â'r concrit - pan nad yw'n bosibl i symud ymlaen ar y lefel haniaethol, mae'n bosibl gwneud rhywbeth trwy ystyried engraifft concrit sy'n isomorffig neu i'r gwrthwyneb.

Gellid dadlau mai'r ffordd mwyaf naturiol a choeth o gyflwyno y pwnc algebra llinol - fel gwneir mewn ambell i gyflwyniad i'r pwnc, byddai i ystyried gofodau fector haniaethol a'u trawsffurfiannau llinol yn gyntaf, datblygu y theori cyn belled a phosibl ac yna cyflwyno matricsau a chymwysiadau i hafaliadau llinol. Trwy ddilyn y trwydd yma, gellid cael gwared efallai o rai o'r profion mwyaf llafurus a beichus a byddai'r manteision o weithredu ar y lefel haniaethol yn dod yn llawer mwy amlwg. Ond, yr agwedd a ddilynir yma yw bod llawer iawn mwy i'w ennill ar y lefel hon, yn arbennig i rai sy'n newydd i'r pwnc. Sef gweithio'n gyntaf ar lefel mwy cyfarwydd a choncrit a defnyddio hon fel sylfaen mwy sicr a chadarn gan symud ymlaen yn fwy hyderus i'r lefel haniaethol. Bethbynnag, er mwyn cario allan cyfrifiadau esblyg byddai'n rhaid yn y diwedd gyflwyno y gwaith yn y modd yma.

Mae'r un peth yn wir am y berthynas rhwng trawsffurfiannau llinol a matricsau. Gwelwyd yn §4.2 y gellir cynrychioli pob trawsffurfiant llinol gan fatrics. Gwelwyd, tra bo'r prawf bod lluosi trawsffurfiannau yn gysylltiadol yn syml iawn, mae'r un canlyniad am luosi matricsau, er yn eithaf elfennol, yn llawer iawn mwy trwsgl.

Enghraifft arall o bwys o isomorffedd o ofodau-K yw'r canlynol:

Gadawer i $\mathcal{L}(V,W)$ ddynodi y set o'r holl drawsffurfiannau llinol o'r ofod-K V i'r ofod-K W. Os yw $S,T \in \mathcal{L}(V,W)$, yna diffinnir eu swm $S+T$ gan

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \text{ am bob } v \in V.$$

Os yw $v.v' \in V,\ \alpha \in K$, yna mae

$$\begin{aligned}(S+T)(\alpha v + v') &= S(\alpha v + v') + T(\alpha v + v')\\ &= \alpha S(v) + S(v') + \alpha T(v) + T(v')\\ &= \alpha(S+T)(v) + (S+T)(v'),\end{aligned}$$

hynny yw, mae $S+T \in \mathcal{L}(V,W)$

Yn yr un modd, os yw $\alpha \in K,\ S \in \mathcal{L}(V,W)$, diffinnir

$$(\alpha S)(v) = \alpha S(v) = \alpha S(v) \text{ am bob } v \in V.$$

Yna, trwy ddadl gyffelyb gwelir bod $\alpha S \in \mathcal{L}(V,W)$.

Yna, mae'n fater gweddol syml i brofi

Lemma 4.16 ***Mae*** $\mathcal{L}(V,W)$ ***yn ofod-***K***.***

Os, yn ychwanegol, mae V **a** W **yn ofodau fector o ddimensiwn meidraidd, yna gellir profi yr isomorffedd-**K **pwysig canlynol sy'n arddangos y berthynas agos rhwng trawsffurfiannau llinol a matricsau.**

Theorem 4.17 ***Os yw*** V ***a*** W ***yn ofodau-***K ***o ddimensiwn meidraidd gyda*** $(V:K)=n$, $(W:K)=m$***, yna mae***

$$\mathcal{L}(V,W)\cong M_{m,n}(K).$$

PRAWF. Os yw $T\in\mathcal{L}(V,W)$ **a** $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$**,** $\mathcal{W}=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ **yn sylfaeni-**K **i** V **a** W **yn ôl eu trefn, gadawer i** ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}}=(\alpha_{ij})$ **fod yn fatrics** T **mewn perthynas â** $\mathcal{B}$ **a** $\mathcal{W}$**. Diffinnir** $\phi:\mathcal{L}(V,W)\to M_{m,n}(K)$ **gan**

$$\phi(T)={}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{W}}.$$

Os yw $\alpha\in K$, $S,T\in\mathcal{L}(V,W)$ **a** ${}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{W}}=(\beta_{ij})$**, yna mae**

$$\phi(\alpha T+S)=(\alpha\alpha_{ij}+\beta_{ij})=\alpha\phi(T)+\phi(S)$$

gan bod

$$(\alpha T+S)v_j=\sum_{i=1}^{m}(\alpha\alpha_{ij}+\beta_{ij})w_i\quad(j=1,2,\ldots,n),$$

hynny yw, mae ϕ **yn drawsffurfiant llinol. Hefyd, mae** ϕ **yn ardrawol, o achos trwy ddefnyddio §4.2 gwelir os yw** $A\in M_{m,n}(K)$**, yna bodola** $T_A\in\mathcal{L}(V,W)$ **fel bod**
$\phi(T_A)=A$**. Ymhellach, os yw** $S,T\in\mathcal{L}(V,W)$ **ag** $\phi(T)=\phi(S)$**, hynny yw,** $(\alpha_{ij})=(\beta_{ij})$ **yna mae** $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$ **ac felly, am** $j=1,2,\ldots,n$**, mae**

$$Tv_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}w_i=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}w_i=Sv_j$$

ac felly mae $S=T$**, hynny yw, mae** ϕ **yn undrawol. Trwy gymeryd i ystyriaeth y cyfan uchod, profwyd yr isomorffedd-**K **rhwng** $\mathcal{L}(V,W)$ **a** $M_{m,n}(K)$.

Canlyneb 4.18 ***Os yw*** V ***a*** W ***yn ofodau-***K ***o ddimensiwn meidraidd gyda*** $(V:K)=n$, $(W:K)=m$***, yna mae*** $(\mathcal{L}(V,W):K)=mn$***.***

Gwelwyd yn y ddau achos, $M_n(K)$ **a** $\mathcal{L}(V):=\mathcal{L}(V,V)$**, yn ychwanegol at y ddau weithredyddion o adio a lluosi scalar, mae'r gweithrediad o 'luosi' yn bosibl hefyd. Felly, mae o ddiddordeb i ystyried a yw'r gweithrediad yma hefyd yn cael ei ddiogelu o tan y mapiad** ϕ**. Neu, i fod yn fwy manwl, os yw** $S,T\in\mathcal{L}(V)$**, a yw** $\phi(S)\phi(T)=\phi(ST)$**, neu** $(ST)_{\mathcal{B}}=(S)_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$**? Gellir profi hyn yn hawdd fel â ganlyn: Os yw** $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$**, yna mae**

$$\begin{aligned}Tv_j &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}v_j\quad(j=1,2,\ldots,n)\\ Sv_j &= \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}v_j\quad(j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}$$

Felly, mae

$$\begin{aligned}(ST)v_j &= S\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}v_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}v_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}\alpha_{ij}\right)v_k,\end{aligned}$$

ac felly, yr elfen-(k,j) o'r matrics $(ST)_{\mathcal{B}}$ yw $\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}\alpha_{ij}$, sydd hefyd yn elfen-$(k,j)$ o'r matrics $(S)_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Efallai bod y darllenydd wedi tybio pan gyflwnwyd y matrics o drawsffurfiant llinol gyntaf pam na fyddid wedi diffinio

$$Tv_j = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}v_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sydd ar yr olwg gyntaf yn edrych yn fwy naturiol, ond a fyddai'n rhoi y matrics sy'n drawsddodyn o'r matrics a roddir yn §4.2. Pe bae hynny wedi ei wneud, yna byddir wedi cael $(ST)_{\mathcal{B}} = (T)_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}}$, neu bod $\phi(ST) = \phi(T)\phi(S)$, hynny yw, bod ϕ yn wrth-homomoffedd-K.

Ymarferiadau 4.5

1. **Os yw $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod fector V, yna am pa werthoedd o λ mae'r trawsffurfiant llinol T a ddiffinnir gan**

$$\begin{aligned}Tv_1 &= v_1 + \lambda v_4\\ Tv_i &= 2v_{i-1} + v_i \quad (i = 2, 3, 4)\end{aligned}$$

   yn anhynod?

2. **Os mai T yw y trawsffurfiant llinol ar $V_3(\mathbb{R})$ a ddiffinnir gan**

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)$$

   dangoswch fod T yn anhynod. Disgrifiwch reol gyffelyb i'r un sy'n diffinio T i ddiffinio T^{-1}.

3. **Diffinnir trawsffurfiant llinol ar $\mathbb{C}$ a ystyrir fel gofod-$\mathbb{R}$ gan $T(z) = (1-i)z$ am bob $z \in \mathbb{C}$. Dangoswch bod T yn anhynod.**

4. **Profwch bod y trawsffurfiant llinol o ddifferu D ar $P_n(\mathbb{R})$ yn hynod. Beth ddywed hyn am gnewyllyn D?**

5. **Os yw T yn drawsffurfiant llinol ar ofod fector V gyda $T^2 = T$, dangoswch fod $I - T$ yn anhynod.**

4.6 Cymwysiadau i Hafaliadau Llinol ac Ranc Matricsau

Gadawer i $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ a gadawer i c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ fod yn n colofn o A, hynny yw, $c_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})^t$. Yna mae $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ yn generadu isofod C_A o $V_m(K)$.

Diffiniad 4.19 ***Os yw $A \in M_{m,n}(K)$, yna diffinnir* ranc golofn *y matrics A fel $(C_A : K)$, hynny yw, ranc golofn A yw y uchafswm o golofnau llinol annibynnol yn y matrics A.***

ENGHREIFFTIAU.

1. **Gadawer i A fod y matrics**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os c_1, c_2, c_3 a c_4 yw colofnau A. Mae ystyried

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4 = 0$$

V yn gyfystyr ac ystyried y datrysiad o system o bedwar hafaliad llinol homogenaidd mewn pedwar newidyn gyda A fel matrics cyfernodau. Gellir dangos trwy ddefnyddio y methodau a ddisgrifwyd ynghynt fod A yn res gywerth â

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felly, ceir bod

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_4 \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_4 \end{aligned}$$

ac felly, trwy roi $\alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0$ a $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1$, ceir yn ôl eu trefn, bod

$$c_3 = \frac{1}{2}(c_1 - 3c_2), \quad c_4 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2).$$

Mae $\{c_1, c_2\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$ ac felly ranc golofn A yw 2.

2. **Dangosir sut i gyfrifo ranc golofn y matrics**

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 3a+3b & -a-2b & 2a+b \\ 3b & 3b & -a+b & a+5b \\ 3a & 4a+2b & -3b & 3a \\ b-a & -2a-b & 3b & 3b \end{pmatrix}$$

am bob gwerth o a a b. Y tro yma gwelir ei bod yn fwy hwylus i ddefnyddio determinantau.

O Theorem 3.1 gwelir bod colofnau A yn llinol annibynnol os a dim ond os yw $\det A \neq 0$. Yn awr, gwelir bod

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -a-2b & 3a+3b & -a-2b & 2a+b \\ 0 & 3b & -a+b & a+5b \\ -a-2b & 4a+2b & -3b & 3a \\ a+2b & -2a-b & 3b & 3b \end{vmatrix} \\
&= (a+2b)\begin{vmatrix} 0 & a+2b & -a+b & 2a+4b \\ 0 & 3b & -a+b & a+5b \\ 0 & 2a+b & 0 & 3a+3b \\ 1 & -2a-b & 3b & 3b \end{vmatrix} \\
&= -(a+2b)(b-a)\begin{vmatrix} a-b & 0 & a-b \\ 3b & 1 & a+5b \\ 2a+b & 0 & 3a+3b \end{vmatrix} \\
&= (a+2b)(a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2a+b & a+2b \end{vmatrix} \\
&= (a+2b)^2(a-b)^2.
\end{aligned}$$

Felly, mae ranc colofn $A = 4$ os nad yw $a = b$ neu $a = -2b$.

Os yw $a = b = 0$, yna mae'n glir bod $A = 0$, ac felly ranc $A = 0$.

Os yw $a = b \neq 0$, yna mae

$$A = \begin{pmatrix} 3a & 6a & -3a & 3a \\ 3a & 3a & 0 & 6a \\ 3a & 6a & -3a & 3a \\ 0 & -3a & 3a & 3a \end{pmatrix}.$$

Nodir bod $c_3 = c_1 - c_2$ a $c_4 = 3c_1 - c_2$, ac os yw $a \neq 0$, mae $\{c_1, c_2\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, hynny yw, os yw $a = b \neq 0$, mae ranc golofn $A = 2$.

Os yw $a = -2b \neq 0$, yna mae

$$A = \begin{pmatrix} -3b & -3b & 0 & -3b \\ 3b & 3b & 3b & 3b \\ -6b & -6b & -3b & -6b \\ 3b & 3b & 3b & 3b \end{pmatrix},$$

ac mae $c_1 = c_2 = c_4$ ac hefyd mae $\{c_1, c_3\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$, hynny yw, os yw $a = -2b \neq 0$, mae ranc golofn $A = 2$.

Cyn mynd ymhellach, nodir y gellir diffinio ranc rhes yn yr un modd, sef fel uchafswm o fectorau rhes sy'n llinol annibynnol yn y matrics A. Profir yn awr bod y ranc golofn a'r ranc rhes o fatrics A yn hafal. Yn Engraifft 1 uchod, sylwer os dynodir rhesi A gan r_1, r_2, r_3, r_4 yn ôl eu trefn, yna $r_3 = r_1 + r_2, r_4 = r_2 - 2r_1$, ac hefyd mae $\{r_1, r_2\}$ yn llinol annibynnol dros $\mathbb{R}$ ac felly, gwelir fod ranc rhes $A = 2$. Profir hyn trwy gyplysu ranc o fatrics gyda'r cysyniad ranc trawsffurfiant llinol.

Os yw $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, gadawer i $T : V_n(K) \to V_m(K)$ sefyll am y trawsffurfiant llinol a ddiffinnir gan

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

lle mae

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Yna A yw matrics T mewn perthynas â sylfaeni-K safonol i $V_n(K)$ a $V_m(K)$.

Yn y adran flaenorol, diffinwyd y ranc o T fel $(\mathbf{im}\, T : K)$; yn awr gellir profi y theorem galonogol ganlynol

Theorem 4.20

$$\textbf{\textit{ranc}}\, T = \textbf{\textit{ranc golofn}}\, A.$$

PRAWF. Os yw

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{im}\, T,$$

yna mae $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ neu

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}).$$

Felly mae $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ yn gyfuniad llinol o golofnau A ac mae colofnau A yn generadu im T dros K. Felly, mae ranc T = ranc golofn A fel oedd angen ei brofi.

Canlyneb 4.21 ***(i) Mae matrics*** $A \in M_n(K)$ ***yn wrthdro os a dim ond os yw ranc golofn*** $A = n$

(ii) Os yw $A \in M_n(K)$ ***yn wrthdro, yna mae ranc golofn o*** AB, BA ***a*** B ***yn hafal, lle mae*** B ***yn fatrics mympwyol gyda*** n ***rhes.***

Mae'r prawf o (ii) yn defnyddio Theorem 4.13.

Ymhellach, gellir profi

Theorem 4.22 ***Mae gan fatricsau sy'n res gywerth yr un ranc golofn.***

PRAWF. Os yw B yn res gywerth i A, yna trwy Theorem 1.23, bodola matricsau elfennol $E_1, E_2, \ldots, E_k$ fel bod

$$B = E_1 E_2 \ldots E_k A.$$

Ond mae matricsau elfennau yn wrthdro ac felly thrwy (ii) uchod ceir bod

$$\text{ranc golofn}\, B = \text{ranc golofn}\, A.$$

Gellir yn awr brofi bod y ranc rhes a ranc golofn matrics yn hafal. Nodir yn gyntaf:

Theorem 4.23 *Os yw B yn fatrics a geir o'r matrics A trwy un weithred rhes elfennol, yna mae*

$$\textit{ranc rhes}\, B = \textit{ranc rhes}\, A.$$

PRAWF. Mae'r canlyniad yma yn dilyn ar ei union trwy ystyried y tri math o weithred rhes elfennol ar wahan

Canlyneb 4.24 *Mae gan fatricsau rhes gywerth yr un ranc rhes. Mae gan fatricsau cywerth yr un ranc rhes,*

O'r ganlyneb hon ac hefyd Theorem 4.23, gellir profi yn awr

Theorem 4.25 *Os yw $A \in M_{m,n}(K)$, yna mae*

$$\textit{ranc rhes}\ \ A = \textit{ranc golofn}\, A.$$

PRAWF. Gadawer i R fod yn fatrics echelon gostyngol y matrics A. Os oes r rhes ansero gan R, yna trwy ystyried ffurf R, yna mae'n amlwg bod ranc rhes A $=$
ranc golofn $A = r$. Yna mae'n dilyn trwy'r Ganlyneb 4.24 a Theorem 4.23, bod
ranc rhes $A =$ ranc golofn $A = r$.

O ganlyniad i hyn, o hyn allan cyfeirir at y ranc o fatrics A.

Yn awr, cymhwysir hyn i ddatrys systemau o hafaliadau llinol. Ystyrir y system o m hafaliad llinol yn yr n newidyn $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Yna, trwy ddefnyddio'r uchod, gwelir fod hyn yn cynrychioli trawsffurfiant llinol $T : V_n(K) \to V_m(K)$ a ddiffinnir gan

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

Profir dwy theorem sy'n ymwneud â datrys hafaliadau llinol. Ystyrir yn gyntaf yr achos homogenaidd.

Theorem 4.26 ***Mae datrysiadau o'r system o hafaliadau llinol***

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

yn ffurfio gofod fector o ddimensiwn $n -$ ***ranc*** A***, lle mae*** $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$***. Bodola datrysiad annistadl os a dim ond os yw*** $n >$ ***ranc*** A***. Os yw*** $n =$ ***ranc*** A***, y datrysiad distadl yw'r unig ddatrysiad.***

PRAWF. O ddefnyddio'r nodiant uchod, gwelir bod darganfod datrysiad i'r system uchod yn gyfystyr a darganfod $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_n(K)$ fel bod $Tv = 0$, hynny yw, mae $v \in V_n(K)$ yn ddatrysiad os a dim ond os yw $v \in \ker T$. Felly, y gofod datrysiad yw $\ker T$ sydd yn isofod o $V_n(K)$. Ond, trwy Theorem 4.10, ceir bod

$$\textbf{ranc}\, T + \textbf{nwliti}\, T = (V_n(K) : K) = n$$

ac felly

$$\begin{aligned} \textbf{nwliti}\, T &= n - \textbf{ranc}\, T \\ &= n - \textbf{ranc}\, A \end{aligned}$$

Felly, bodola datrysiad annistadl i'r system os a dim ond os yw $n - \textbf{ranc}\, A > 0$.

Os yw $n = \textbf{ranc}\, A$, yna mae $\ker T = \{0\}$ ac mae'r datrysiad distadl yn unigryw.

Yn awr, ystyrir yr achos anhomogenaidd

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Bodola datrysiad o'r system hon os a dim ond os yw $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \textbf{im}\, T$. Ond mae colofnau A yn generadu im T, felly mae datrysiad yn bodoli os a dim ond os yw $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ yn gyfuniad llinol o golofnau A.

Gadawer $(A|b)$ fod y matrics estynol o A, hynny yw, y matrics a geir trwy ychwanegu $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^t$ fel colofn olaf i'r matrics A. Yna gellir profi

Theorem 4.27 ***Bodola datrysiad o'r system o hafaliadau llinol***

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

os a dim ond os yw ranc $(A|b) =$ ***ranc*** A***.***

PRAWF. Bodola datrysiad o'r system os a dim ond os yw $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ yn gyfuniad llinol o golofnau A. Felly, os bodola datrysiad, yna mae ranc $(A|b) =$ ranc A.

I'r gwrthwyneb, os yw ranc $(A|b) =$ ranc A yna yntau mae $b = 0$ neu mae b yn gyfuniad llinol o golofnau A ac felly bodola datrysiad o'r system.

Dylid cymharu canlyniadau Theorem 4.26 a Theorem 4.27 gyda'r criteria am fodolaeth datrysiad i system o hafaliadau llinol ym Mhennod 1.

ENGHREIFFTIAU

1 Darganfyddir os oes gan y systemau hafaliadau llinol canlynol ddatrysiadau annistadl?

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Ystyrier y matrics

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mae'n amlwg fod ranc $A \leq 3 < 4$ a thrwy Theorem 4.27 mae gan y system ddatrysiad annistadl.

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Gellir dangos yn hawdd fod y matrics $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ yn res gywerth a'r matrics $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, felly mae ranc $A = 3$ a thrwy Theorem 4.27 eto ceir yn awr mai'r datrysiad distadl yw'r datrysiad unigryw.

2. Dangosir sut i ddatrys y system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 3x_4 & - & 9x_5 & = & 3 \end{array}.$$

Y matrics estynol yn yr achos yma yw

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

sy'n res gywerth â'r matrics

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Gan fod ranc $(A|b)$ = ranc A, trwy Theorem 4.27 gwelir y bodola datrysiad. Gellir darganfod y datrysiad hwn yn awr trwy ddefnyddio y dulliau a gyflwynwyd ym Mhennod 1. O'r uchod, gwelir fod y system wreiddiol yn gywerth â'r system

$$\begin{array}{rcrcl} & & x_1 & = & 1 \\ x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

ac felly, cymer y datrysiad cyffredinnol y ffurf

$$(1, 2\lambda, \lambda, -3\mu, \mu) = (1,0,0,0,0) + \lambda(0,2,1,0,0) + \mu(0,0,0,-3,1).$$

3. I'r system o hafaliadau llinol

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & & = & 7 \end{array}$$

y matrics estynol yw

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

sydd yn res gywerth â'r matrics

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

sy'n golygu bod ranc $(A|b) >$ ranc A, ac felly nid oes datrysiad i'r system.

Ymarferion 4.6

1. Dangoswch mai ranc y matrics

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

yw 2.

2. Darganfyddwch ranc y matricsau canlynol am bob gwerth o a

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+a \\ 2 & 3 & 4-a & 2 \\ 1 & 1-a & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 1 & 1-2a & 1 & 1-2a \\ 1+2a & -1-a & -1+2a & 1-a \\ 2-a & 3a & 2a & 2-a \\ 5a & 1-a & 1+3a & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Dangoswch mai ranc y matrics

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & -a & -b \\ a+b & a+b & 2a & -2a \\ -2a & 2a & a+b & a+b \end{pmatrix}$$

yw 4 **heblaw pan mae** $a+b=0$ **neu** $b=3a$**. Penderfynwch y ranc yn y ddau achos yma.**

4. Darganfyddwch werthoedd t **fel bod ranc y matrics**

$$\begin{pmatrix} (1+t)t & t-1 & -t \\ 0 & 2 & -1 \\ -2t & 4-2t & t-2 \end{pmatrix}$$

yn llai na 3 **a darganfyddwch y ranc yn yr achosion hyn. Ymhob achos mynegwch un o'r colofnau fel cyfuniad llinol o'r colofnau eraill.**

5. Darganfyddwch ranc y trawsffurfianau llinol a ddiffinnir yn Ymarferion 4.2 Rhif 7 am bob gwerth o α, β **a** γ**.**

6. Gadawer i $S \in M_n(K)$ **fod yn safadwy a** T **yn drawsffurfiant llinol ar** $M_n(K)$ **a ddiffinnir gan** $T(A) = AS$ **am bob** $A \in M_n(K)$**. Os yw** S **yn fatrics gwrthdro, dangoswch fod ranc** $T = n^2$**, Yn gyffredinol, profwch fod ranc** $T = n\text{ranc}S$**.**

Chapter 5

Gofodau Lluosiad Mewnol

5.1 Cyflwyniad a Geometreg Dimensiwn-3

Ym Mhennod 3, diffinwyd gofodau fector dros unrhyw faes K fel cyffredinoliaeth o ofodau real o ddimensiwn-2 ac o ddimensiwn-3. Estynwyd nifer o gysyniadau sylfaenol yn yr achosion hyn i ofodau fector yn gyffredinol, er engraifft, sylfaeni-K, trawsffurfiannau llinol, etc.. Ond mae cysyniadau eraill hefyd yn yr achosion hyn sy'n ddefnyddiol, megis hyd llinell, yr ongl rhwng dwy linell, llinellau perpendiciwlar, etc.. Yn y bennod hon, ystyrir sut y gellir cyffredinoli y syniadau hyn i ofodau fector dros y meysydd real a chymhlyg. Ond cyn ystyried y cyffredinoliadau hyn, adolygir y cysyniadau hyn yng nghofod-3, $V_3(\mathbb{R})$.

Gadawer i $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in V_3(\mathbb{R})$, yna trwy edrych ar Ffigwr 1, hyd v a ddynodir gan $||v||$, yw

$$\begin{aligned} ||v|| &= \sqrt{OR^2 + PR^2} \\ &= \sqrt{OQ^2 + QR^2 + PR^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

lle mae $\sqrt{}$ yn sefyll am yr ail isradd positif.

Nodir, os yw $\lambda \in \mathbb{R}$, yna mae

$$||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v||.$$

Gelwir $v \in V_3(\mathbb{R})$ yn fector unedol os yw $||v|| = 1$. Er enghraifft, mae

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

yn fectorau unedol yn $V_3(\mathbb{R})$. Os yw $v \in V_3(\mathbb{R})$, yna mae $\frac{1}{||v||}v$ yn fector unedol.

Gadawer i θ, ψ, ϕ fod yr onglau mae OP yn ei wneud gyda'r echelau-x,-y a -z yn ôl eu trefn, yna mae

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{\alpha}{||v||}, \cos\psi = \frac{\beta}{||v||}, \cos\phi = \frac{\gamma}{||v||}.$$

Gelwir $\cos\theta$, $\cos\psi$ a $\cos\phi$ yn gosinau cyfeiriad v.

Yn awr, gadawer i v a w fod yn fectorau yn $V_3(\mathbb{R})$, a gynrychiolir gan y pwyntiau P a Q yn ôl eu trefn, gweler Ffigwr 2. Mae'r pellter rhwng P a Q, a ddynodir gan $\mathbf{d}(P,Q)$, neu hyd y linell PQ, yn hafal â hyd OP', lle mae P' yw'r pwynt $(\alpha-\alpha',\beta-\beta',\gamma-\gamma')$. Felly,

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= ||(\alpha-\alpha',\beta-\beta',\gamma-\gamma')|| \\ &= \sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2} \\ &= ||v-w||. \end{aligned}$$

Diffinnir yr ongl rhwng v a w i fod yr ongl $POQ=\theta$ fel bod $0\le\theta\le\pi$. Yn awr, trwy'r rheol cosin ceir bod

$$PQ^2 = OP^2+OQ^2-2OP.OQ\cos\theta,$$

hynny yw,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{||v-w||^2-||v||^2-||w||^2}{-2||v||\,||w||} \\ &= \frac{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)}{-2||v||\,||w||} \\ &= \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{||v||\,||w||}. \end{aligned}$$

Os yw $v=(\alpha,\beta,\gamma)$ a $w=(\alpha',\beta',\gamma')$, yna diffinnir lluoswm mewnol (neu lluoswm dot) v a w, a ddynodir gan (v,w) (neu $v.w$) gan

$$(v,w)=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'.$$

Golyga hyn, o'r ddadl uchod, ceir bod

$$(v,w)=||v||\,||w||\cos\theta$$

a ystyrir fel y diffiniad clasurol o luoswm dot. Nodir hefyd bod $||v||=\sqrt{(v,v)}$.

Dywedir bod dau fector v a w yn perpendicwlar neu yn orthogonal os yw $\cos\theta=0$ neu $(v,w)=0$. Er engraifft, mae $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ yn perpendicwlar i'w gilydd. Hefyd, mae $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yn perpendicwlar i'w gilydd.

Mewn cymwysiadau physegol, dynodir y fectorau $(1,0,0),(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ gan **i**, **j** a **k** yn ôl eu trefn. Gwelwyd ym Mhennod 3, bod $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ safonol i $V_3(\mathbb{R})$. Felly, mae gan $V_3(\mathbb{R})$ sylfaen-$\mathbb{R}$ sy'n cynnwys fectorau sy'n perpendicwlar neu'n orthogonal i'w gilydd. Dyma yw'r sylfaen i'r system cyfesurennau Cartesaidd sydd o bwysigrwydd sylfaenol i ddatblygiad geometreg. Yn yr adran nesaf, ar ôl cyfredinoli y cysyniad o fectorau orthogonal i ofodau fector mympwyol, dangosir bod pob gofod fector real a cymhlyg o ddimensiwn meidraidd gan sylfaen sy'n cynnwys fectorau orthogonal.

Gellir profi y theorem ganlynol sy'n ymwneud â lluoswm mewnol.

Theorem 5.1 ***Os yw*** $u, v, w \in V_3(\mathbb{R})$ ***a*** $\lambda \in \mathbb{R}$***, yna mae***

(i) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$***,***

(ii) $(\lambda v, w) = \lambda(v, w)$***,***

(iii) $(v, w) = (w, v)$***,***

(iv) $(v, v) > 0$ ***os yw*** $v \neq 0$***.***

PRAWF. Mae'r prawf yn syml, er enghraifft, os yw $v = (\alpha, \beta, \gamma), w = (\alpha', \beta', \gamma')$**, yna mae**

$$\begin{aligned}(\lambda v, w) &= \lambda\alpha\alpha' + \lambda\beta\beta' + \lambda\gamma\gamma' \\ &= \lambda(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') \\ &= \lambda(v, w)\end{aligned}$$

sy'n profi (ii). Mae $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ **lle mae** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ **os a dim ond os yw o leiaf un o** α, β **neu** γ **yn ansero, hynny yw, mae** $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$**, sy'n profi (iv).**

Pan ddiffinwyd gofodau fector gyntaf ym Mhennod 3, defnyddiwyd priodweddau sylfaenol â wirwyd yn yr achos arbennig $V_n(K)$ **i gymhellu diffiniad gofod fector haniaethol. I'r cysyniadau newydd â gyflwynir yn awr, rhinweddau y lluoswm mewnol a restrwyd yn Theorem 5.1 sy'n hollol hanfodol i wneud i bopeth weithio'n esmwyth yng nghweddill y bennod hon. Felly, beth a wneir yw troi y cyfan wyneb i waered a cymerir datganiadau Theorem 5.1 yn yr achos arbennig** $V_3(\mathbb{R})$ **fel y sylfaen i'r diffiniad o ofodau lluoswm mewnol a gyflwynir yn yr adran nesaf.**

O reidrwydd, rhaid cyfyngu'r datblygiad yn y bennod hon i'r meysydd real a chymhlyg, neu eu is-feysydd. Ni fyddai'r mynegiant (iv) yn synhwyrol ond mewn maes trefnedig fel y maes real, ond trwy gymhwyso (iii) gwelir ei bod yn bosibl i ymestyn y cyfan i gynnwys y maes cymhlyg hefyd.

Mae'n bosibl datblygu theori gofodau fector dros faes mympwyol gyda lluoswm mewnol cymesur, hynny yw, lluoswm mewnol yn bodlonni (i), (ii) a (iii) ond gwelir bod (iv) yn hollol hanfodol i gyffredinoli cysyniadau canolog fel hyd fector, y pellter rhwng dau bwynt, yr ongl rhwng dau fector a fectorau perpendicwlar neu orthogonal.

Ymarferiadau 5.1

1. **Pa rai o'r parau o fectorau canlynol sy'n perpendicwlar?**

   (i) $(2, -1, 1)$ **a** $(1, 2, 1)$

   (ii) $(2, 1, -3)$ **a** $(1, 1, 1)$

   (iii) $(7, 5, 3)$ **a** $(1, -2, 1)$**.**

2. **Darganfyddwch fector sy'n berpendicwlar i'r fectorau** $(2, -1, 2)$ **a** $(1, -1, 2)$**.**

3. Darganfyddwch hydoedd y fectorau canlynol

(i) $(1, 2, 1)$ **(ii)** $(3, -2, 5)$ **(iii)** $(1, 0, -1)$.

4. Darganfyddwch yr ongl rhwng y parau o fectorau canlynol

(i) $(3, -2, 1)$ **a** $(1, -1, 1)$

(ii) $(2, 1, -1)$ **a** $(1, 0, 2)$.

5.2 Gofodau Ewclidaidd ac Unedol

Yn yr adran hon, bydd K yn sefyll bob amser am yntau y maes o rifau real $\mathbb{R}$ neu y maes o rifau cymhlyg $\mathbb{C}$, a V yn ofod-K.

Diffiniad 5.2 Lluoswm mewnol ***ar V yw ffwythiant sy'n neilltuo i bob pâr o fectorau $u, v \in V$ sgalar yn K a ddynodir gan (u, v) gyda'r priodweddau canlynol,***

(i) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,

(ii) $(\lambda v, w) = \lambda(v, w)$,

(iii) $(v, w) = \overline{(w, v)}$,

(iv) $(v, v) > 0$ ***os yw*** $v \neq 0$,

am bob $u, v, w \in V$ a $\lambda \in K$ ac mae'r $^{-}$ yn dynodi cymeryd y cyfiau cymhlyg. Gelwir gofod fector V gyda lluoswm mewnol yn **ofod lluoswm mewnol.** ***Yn arbennig, gelwir gofod fector lluoswm mewnol real yn*** **ofod ewclidaidd** ***a gofod fector lluoswm mewnol cymhlyg yn*** **ofod unedol.**

Cyn edrych ar enghreifftiau, nodir bod (i), (ii) a (iii) yn arwain i'r canlyniadau

$$(\alpha u + \beta w, v) = \alpha(u, v) + \beta(w, v)$$

a

$$(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha}(u, v) + \bar{\beta}(u, w)$$

am bob $\alpha, \beta \in K$, $u, v, w \in V$ gan bod, yn gyntaf

$$\begin{aligned}(\alpha u + \beta w, v) &= (\alpha u, v) + (\beta w, v) \text{ trwy ddefnyddio } (i)\\ &= \alpha(u, v) + \beta(w, v) \text{ trwy ddefnyddio } (ii)\end{aligned}$$

ac yn ail,

$$\begin{aligned}(u, \alpha v + \beta w) &= \overline{(\alpha v + \beta w, u)} \text{ trwy ddefnyddio } (iii)\\ &= \overline{\alpha(v, u) + \beta(w, v)} \text{ trwy ddefnyddio y canlyniad uchod}\\ &= \bar{\alpha}(u, v) + \bar{\beta}(u, w) \text{ trwy ddefnyddio } (iii).\end{aligned}$$

Noder bod (iii) yn sicrhau bod $(u, v) \in \mathbb{R}$, ac felly bod (iv) yn fynegiant synhwyrol.

ENGHREIFFTIAU

1. **Os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), u = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in V_n(\mathbb{R})$, diffinnir**

$$(u, v) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

yna mae'n syml i ddangos fod hwn yn luoswm mewnol ar $V_n(\mathbb{R})$ ac felly mae $V_n(\mathbb{R})$ yn ofod ewclidaidd. Mae hwn yn gyffredinoliad naturiol o'r lluoswm mewnol ar $V_3(\mathbb{R})$ ystyriwyd yn Adran 5.1 - gelwir hwn yn luoswm mewnol safonol ar $V_n(\mathbb{R})$.

2. **Os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), u = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in V_n(\mathbb{C})$, diffinnir**

$$(u, v) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$$

yna eto mae'n syml i ddangos fod hwn eto yn luoswm mewnol ar $V_n(\mathbb{C})$ ac felly mae $V_n(\mathbb{C})$ yn ofod unedol. Gelwir hwn yn luoswm mewnol safonol ar $V_n(\mathbb{C})$.

3. **Os yw $f, g \in C[a, b]$, diffinnir**

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

yna mae (i) - (iv) yn Niffiniad 5.2 yn briodweddau cyfarwydd o integreiddio. Gelwir hwn yn luoswm mewnol safonol ar $C[a, b]$.

4. **Os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), u = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in V_n(\mathbb{R})$, diffinnir**

$$(u, v) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \cdots + n\alpha_n\beta_n$$

yna eto mae'n syml i ddangos fod hwn hefyd yn luoswm mewnol ar $V_n(\mathbb{R})$.

O hyn ymlaen yn y bennod hon, bydd V yn dynodi gofod lluoswm mewnol.

Diffiniad 5.3 ***Diffinnir*** **hyd** ***neu*** **norm** $v \in V$ ***ac a ddynodir gan*** $||v||$ ***, gan***

$$||v|| = \sqrt{(v, v)}.$$

Gelwir fector $v \in V$ ***gyda*** $||v|| = 1$ ***yn fector*** **unedol.**

Noder trwy ddefnyddio Diffiniad 5.2 (iv), os yw $v \neq 0$, yna mae $(v, v) > 0$ ac felly, mae $\sqrt{(v, v)}$ yn rif positif real. Hefyd, os yw $v \in V, v \neq 0$, yna mae $\frac{1}{||v||}v$ yn fector unedol: dywedir bod y fector v wedi cael ei normaleiddio.

Yn achos $V_n(\mathbb{R})$, mae'n glir bod hwn yn gyffredinoli y cysyniad o hyd yn $V_3(\mathbb{R})$ a ystyriwyd yn Adran 5.1. Yn $V_n(\mathbb{C})$, os yw $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in V_n(\mathbb{C})$, yna mae

$$\begin{aligned}(v, v) &= \alpha_1\bar{\alpha_1} + \alpha_2\bar{\alpha_2} + \cdots + \alpha_n\bar{\alpha_n} \\ &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2.\end{aligned}$$

Dangosir yn y theorem nesaf fod y cysyniad o hyd fector yn gyson gyda rhai o briodweddau cyfarwydd o hyd llinell yn y plân neu yn gofod-3.

Theorem 5.4 ***Os yw*** $u, v \in V$ ***a*** $\alpha \in K$***, yna mae***

(i) $||\alpha v|| = |\alpha|\,||v||$,

(ii) $||v|| > 0$ ***os yw*** $v \neq 0$,

(iii) $|(u, v)| \leq ||u||\,||v||$,

(iv) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

PRAWF. (i) Gwelir bod

$$\begin{aligned}||\alpha v|| &= \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} \\ &= \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(v, v)} \\ &= |\alpha|\,||v||.\end{aligned}$$

Mae (ii) yn awr yn dilyn o Ddiffiniad 5.2 (iv).

(iii) Os yw $u = 0$, yna mae'r ddwy ochor yn 0, ac felly mae'r canlyniad yn dilyn.

Os yw $u \neq 0$, yna rhodder $w = v - \frac{(v,u)}{||u||^2}u$, yna mae

$$\begin{aligned}(w, u) &= (v, u) - \frac{(v, u)}{||u||^2}(u, u) \\ &= 0\end{aligned}$$

ac mae

$$\begin{aligned}0 \leq ||w||^2 &= (w, w) \\ &= \left(w, v - \frac{(v, u)}{||u||^2}u\right) \\ &= (w, v) \\ &= (v, v) - \frac{(v, u)}{||u||^2}(u, v) \\ &= ||v||^2 - \frac{|(u, v)|^2}{||u||^2},\end{aligned}$$

hynny yw,

$$|(u, v)|^2 \leq ||u||^2||v||^2$$

neu

$$|(u,v)| \leq ||u||\,||v||.$$

(iv) Yn awr, trwy ddefnyddio y canlyniad (iii) uchod

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 = (u+v,u+v) &= ||u||^2 + (u,v) + (v,u) + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + |(u,v)+(v,u)| + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + |(u,v)| + |(v,u)| + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

ac felly mae

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Gelwir (iii) yn anhafaledd Cauchy-Schwartz, sydd fel y gwelir isod yn gyffredinoliad o anhafaleddau cyfarwydd mewn cysylltiadau eraill fel yr eglurir yno. Gelwir (iv) yr anhafaledd triongl, gan yn achos mwy cyfarwydd $V_3(\mathbb{R})$, dywed hwn fod hyd un ochor triongl yn llai na cyfanswm hydoedd y ddwy ochor arall fel gwelir yn Ffigwr 3.

Fel arall, diffinnir

$$d(u,v) = ||v-u||$$

am bob $u, v \in V$, a gelwir $d(u,v)$ yr pellter rhwng u a v. Yna ceir fersiwn gwahanol o'r anhafaledd triongl.

Canlyneb 5.5 ***Os yw $u, v, w \in V$, yna mae***

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

PRAWF. Os rhoddir $v-u$ a $w-v$ yn lle u a v yn (iv) yn ôl eu trefn, yna bydd $w-u$ yn disodli $u+v$, yna bydd (iv) o Theorem 5.4 yn trawsnewid i

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

Yn $V_n(\mathbb{R})$ a $V_n(\mathbb{C})$ gyda'r lluosymiau mewnol safonol daw (iii) yn

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2)$$

a

$$|(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)|^2 \leq (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2)(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 + \cdots + |\beta_n|^2)$$

yn ôl eu trefn. Gelwir y ddau fynegiant yma (mae'r cyntaf yn amlwg ac yn achos arbennig o'r ail) yn anhafaleddau Cauchy.

Yn $C[a,b]$ gyda'r lluosiad mewnol safonol, mynegir (iii) fel

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

sydd yn briodwedd pwysig o integreiddio.

Gellir hefyd ymestyn y cysyniad o ongl i ofodau ewclidaidd real. Os yw V yn ofod ewclidaidd real, ac $u, v \in V$, yna trwy Theorem 5.4 (iii), ceir bod

$$\frac{|(u,v)|}{||u||\,||v||} \leq 1,$$

neu beth sy'n gyfystur

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{||u||\,||v||} \leq 1$$

ac mae $(u,v)/||u|||, ||v||$ yn rif real. Yna diffinnir yr ongl rhwng u a v fel y rhif $0 \leq \theta \leq \pi$ fel bod

$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{||u||\,||v||}.$$

Mae'r hyn a fynegwyd uchod yn sicrhau bod θ wedi ei ddiffinio yn unigryw ac hefyd bod y diffiniad yn un synhwyrol, hynny yw, mae $\cos\theta$ yn rif real ac mae $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ am bob ongl θ. Mae'n glir na ellir ymestyn y diffiniad hwn o ongl i ofodau unedol. Os yw $\theta = \pi/2$, yna mae $(u,v) = 0$ a dywedir bod u a v yn orthogonal neu yn perpendicwlar i'w gilydd. Dyma fydd pwnc yr adran nesaf gan fod y datganiad "$(u,v) = 0$" yn synhwyrol mewn gofodau unedol hefyd, yn wir, gellir cyflwyno'r cysyiad o fectorau orthogonal mewn unrhyw ofod lluoswm mewnol.

ENGHRAIFFT

Yn $V_6(\mathbb{R})$ gan ddefnyddio'r lluoswm mewnol safonol, os yw $u = (3, -2, -3, 1, 1, -1)$ a $v = (-1, 0, 0, 1, 1, 1)$, trwy Diffiniad 5.3 gwelir bod

$$||u||^2 = (u,u) = 9+4+9+1+1+1 = 25 \text{ a } ||v||^2 = 1+1+1+1 = 4,$$

ac felly ceir hyd u a v, sef $||u|| = 5$ a $||v|| = 2$. Rhoddir yr ongl θ rhwng u a v gan

$$\cos\theta = \frac{-3+1+1-1}{5.2} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

ac felly, $\theta = \cos^{-1}(-1/5) (\approx 101^0\, 34')$. Sylwer bod $u + v = (2, -2, -3, 0, 0, -2)$, ac felly mae

$$||u+v|| = \sqrt{4+4+9+4} = \sqrt{21} < 2+5 = ||u|| + ||v||,$$

sy'n gwirio Theorem 5.4 (iv).

Ymarferiadau 5.2

1. **Pa rai o'r canlynol sy'n luoswm mewnol ar $V_2(\mathbb{R})$, os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2)$, $v = (\beta_1, \beta_2)$?**

   (i) $(u,v) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2$

   (ii) $(u,v) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2$

   (i) $(u,v) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2$

   (i) $(u,v) = \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2$

2. Pa rai o'r canlynol sy'n luoswm mewnol ar $V_3(\mathbb{R})$, os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$?

(i) $(u, v) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + 2\alpha_2\beta_3 + 2\alpha_3\beta_2$

(ii) $(u, v) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_1\beta_3 + 4\alpha_2\beta_3$

(iii) $(u, v) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2$

3. Pa rai o'r canlynol sy'n luoswm mewnol ar $C[-1, 1]$, yr ofod fector o ffwythianau didor o werth real a ddiffinnir ar $[-1, 1]$ os yw $f, g \in C[-1, 1]$?

(i) $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(ii) $(f, g) = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)f(x)g(x)dx$

(iii) $(f, g) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)dx$**.**

4. Pa rai o'r canlynol sy'n luoswm mewnol ar $M_n(\mathbb{R})$, os yw $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

(i) $(A, B) =$ **trace** (AB)

(ii) $(A, B) = \det(AB)$

5. Cyfrifwch $||u||, ||v||, ||u + v||, (u, v)$ a'r ongl rhwng u a v a gwiriwch Anhafaleddau Cauchy-Schwartz a Triongl pan mae

(i) $u = (1, 0, 2, -2)$ **a** $v = (2, 1, -2, 0)$ **yn elfennau o** $V_4(\mathbb{R})$ **gyda'r lluoswm mewnol safonol**

(ii) $u = (1, 0, 2)$ **a** $v = (2, 1, 2)$ **yn elfennau o** $V_3(\mathbb{R})$ **gyda'r lluosymau mewnol a ddiffinwyd yn Ymarfer 2 uchod.**

(iii) $u = x$ **a** $v = \cos \pi x$ **yn elfennau o** $C[0, 1]$ **gyda'r lluoswm mewnol safonol.**

6. Os yw V yn ofod ewclidaidd ac $u, v \in V$, profwch bod

(i) $|\,||u|| - ||v||\,| \leq ||u - v||$

(ii) $4(u, v) = ||u + v||^2 - ||u - v||^2$

(iii) $||u - v||^2 + ||u + v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$**.**

7. Os yw $u, v \in V$, dangoswch fod y ffwythiant pellter $d(\ ,\ )$ yn bodlonni

(i) $d(u, v) \geq 0$

(ii) $d(u, v) = d(v, u)$

(iii) $d(u, v) = 0$ **os a dim ond os yw** $u = v$**.**

5.3 Fectorau Orthogonal

Gadawer i V fod yn ofod lluoswm mewnol.

Diffiniad 5.6 ***Os yw $u, v \in V$, yna dywedir bod u a v yn*** **orthogonal** ***(neu yn*** **perpendicwlar** ***i'w gilydd) os yw $(u, v) = 0$. Dywedir bod is-set S o V yn*** **set orthogonal** ***os yw elfennau S yn orthogonal i'w gilydd. Gelwir set orthogonal yn*** **set orthonormal** ***os yw pob elfen $v \in V$ yn fector unedol, hynny yw, $||v|| = 1$.***

ENGHREIFFTIAU

1. **Yn $V_6(\mathbb{R})$, gyda'r lluoswm mewnol safonol, os yw $v = (3, -2, -3, 1, 1, -1)$, yna os yw $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in V_6(\mathbb{R})$ yn orthogonal i v, mae**

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 = 0,$$

hynny yw, rhoddir y set o'r holl fectorau sy'n orthogonal i v trwy ddarganfod pob datrysiad i'r hafaliad hwn. Mae'n glir bod

$$\{(1,0,0,0,0,3), (0,1,0,0,0,-2), (0,0,1,0,0,-3), (0,0,0,1,0,1), (0,0,0,0,1,1)\}$$

yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i ofod datrysiad yr hafaliad llinol hwn, ac felly, mae'r holl gyfuniadau llinol-$\mathbb{R}$ o'r fectorau hyn yn orthogonal i v.

2. **Mae'r sylfaeni safonol i $V_n(\mathbb{R})$ a $V_n(\mathbb{C})$ yn orthonormal mewn perthynas â'r lluoswm mewnol safonol.**

3. **Yn $C[-1, 1]$, dangosir bod $\{P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$ yn set orthogonal o elfennau gyda'r lluoswm mewnol safonol i'r gofod fector hwn.**

Gwelir bod

$$\begin{aligned}
(P_0(x), P_1(x)) &= \int_{-1}^{1} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\
(P_0(x), P_2(x)) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
(P_1(x), P_2(x)) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x(3x^2 - 1) dx = \left[\frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Yn ychwanegol, mae

$$\begin{aligned}
(P_0(x), P_0(x)) &= \int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = 1 + 1 = 2 \\
(P_1(x), P_1(x)) &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
(P_2(x), P_2(x)) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(3x^2 - 1)^2 dx = \left[\frac{9x^5}{20} - \frac{6x^3}{12} + \frac{x}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

ac felly mae gan $P_0(x), P_1(x)$ a $P_3(x)$ yr hydoedd $\sqrt{2}, \sqrt{2/3}$ a $\sqrt{2/5}$ yn ôl eu trefn.

Yn awr, profir y lemma ganlynol

Lemma 5.7 *Mae set orthogonal o fectorau ansero mewn gofod lluoswm mewnol V yn llinol annibynnol.*

PRAWF Gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fod yn set o fectorau orthogonal ansero yn V. Ystyrir

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

lle mae $\alpha_i \in K\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. Yna, am bob $1 \leq k \leq n$, ceir bod

$$\begin{aligned} 0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k\right) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i, v_k) \\ &= \alpha_k (v_k, v_k) \end{aligned}$$

a gan bod $v_k \neq 0$, mae $(v_k, v_k) \neq 0$ sy'n golygu bod $\alpha_k = 0$. Felly, mae $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn llinol annibynnol dros K.

Yn awr, defnyddir y canlyniad hwn i brofi y prif ganlyniad sy'n dangos bod gan pob gofod lluoswm mewnol o ddimensiwn meidraidd sylfaen o fectorau orthonormal. Mae'r prawf yn un adeiladol sy'n rhoi gweithdrefn sy'n pennu sylfaen orthonormal o unrhyw sylfaen roddedig i V.

Theorem 5.8 Gweithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt *Mae gan pob gofod lluoswm meidraidd o ddimensiwn meidraidd sylfaen o fectorau orthonormal.*

PRAWF Gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ fod yn sylfaen-K i ofod lluoswm mewnol V. Diffinnir is-set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o V yn anwythol fel â ganlyn

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{||u_1||^2} u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{(v_3, u_2)}{||u_2||^2} u_2 - \frac{(v_3, u_1)}{||u_1||^2} u_1 \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \frac{(v_n, u_{n-1})}{||u_{n-1}||^2} u_{n-1} - \cdots - \frac{(v_n, u_1)}{||u_1||^2} u_1, \end{aligned}$$

hynny yw, cyfernod u_j yn u_i, $j < i$ yw lluosiad mewnol v_i gyda u_j wedi ei rannu gan hyd u_j.

Yn gyntaf, mae'r elfennau $u_1, u_2, \ldots, u_n$ yn ansero, canys fel arall byddid yn gwrth ddweud y ffaith bod $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn llinol annibynnol. Dangosir

bod $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ **yn set orthogonal trwy brawf anwythol. Yn gyntaf, os yw** $n = 2$**, yna ceir bod**

$$(u_2, u_1) = (v_2, u_1) - \frac{(v_2, u_1)}{||u_1||^2}(u_1, u_1) = 0,$$

ac felly, mae $\{u_1, u_2\}$ **yn set orthogonal. Yn ail, os yw** $n > 2$**, cymerer bod** $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ **yn set orthogonal. I ddangos bod** $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ **yn set orthogonal, rhaid profi bod** $(u_n, u_i) = 0\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$**. Nawr, am bob** $i = 1, 2, \ldots, n-1$**, ceir trwy'r ddybiaeth anwythiad bod**

$$\begin{aligned}(u_n, u_i) &= (v_n, u_i) - \frac{(v_n, u_{n-1})}{||u_{n-1}||^2}(u_{n-1}, u_i) - \cdots - \frac{(v_n, u_1)}{||u_1||^2}(u_1, u_i)\\ &= (v_n, u_i) - \frac{(v_n, u_i)}{||u_i||^2}(u_i, u_i)\\ &= 0,\end{aligned}$$

fel sydd ei angen.

Ymhellach, trwy'r lemma flaenorol, mae $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ **yn set linol annibynnol dros** K **ac felly, mae'n sylfaen-**K **i** V**. Yn awr, trwy roi** $w_i = \frac{1}{||u_i||}u_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ **gan fod bob** w_i **yn fector unedol ac mae** $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ **yn sylfaen orthonormal i** V

Yn §5.2, Engraifft 2, diffinwyd y lluoswm mewnol sylfaenol ar $V_n(\mathbb{C})$**; dangosir yn awr fod pob lluoswm mewnol ar ofod lluoswm mewnol ar ofod lluoswm mewnol o ddimensiwn meidraidd i bob pwrpas yn cymeryd y ffurf yma.**

Os yw V **yn ofod lluoswm mewnol o ddimensiwn meidraidd, yna trwy'r theorem uchod mae ganddo sylfaen-**K $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **o fectorau orthonormal. Os yw** $u, v \in V$**, yna mae** $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\,(\alpha_i, \beta_i \in K)$ **ac mae**

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (v_i, v_j)\\ &= \sum_{i}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i\end{aligned}$$

gan bod $(v_i, v_j) = \delta_{ij}\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$**.**

ENGHREIFFTIAU

1. **Defnyddir Gweithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt ar y set o fectorau**
   $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 3, 4)$ **i roi sylfaen orthonormal i** $V_3(\mathbb{R})$**.**

Mae v_1 a v_2 yn barod yn orthogonal i'w gilydd, felly, rhodder

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,0,1) \\
u_2 &= v_2 = (1,0,-1) \\
u_3 &= v_3 - \frac{(v_3,u_2)}{||u_2||^2}u_2 - \frac{(v_3,u_1)}{||u_1||^2}u_1 \\
&= (0,3,4) - \frac{-4}{2}(1,0,-1) - \frac{4}{2}(1,0,1) \\
&= (0,3,0)
\end{aligned}$$

ac mae $\{u_1,u_2,u_3\}$ yn set orthogonal. Hydoedd y fectorau hyn yw $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ a 3 yn ôl eu trefn; felly

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), (0,1,0)\right\}.$$

yw'r sylfaen orthonormal.

2. **Dangosir yn awr sut i ymestyn y set orthonormal $\{\frac{1}{3}(2,0,-1,2), \frac{1}{3}(2,1,0,-2)\}$ i roi sylfaen orthonormal i $V_3(\mathbb{R})$.**

   Mae'n glir bod y set $\{v_1 = \frac{1}{3}(2,0,-1,2), v_2 = \frac{1}{3}(2,1,0,-2), v_3 = (1,0,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_4(\mathbb{R})$. Yna mae

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 \\
u_3 &= v_3 - \frac{(v_3,u_2)}{||u_2||^2}u_2 - \frac{(v_3,u_1)}{||u_1||^2}u_1 \\
&= (1,0,0,0) - \frac{2}{3}.\frac{1}{3}(2,1,0,-2) - \frac{2}{3}.\frac{1}{3}(2,0,-1,2) \\
&= \frac{1}{9}(1,-2,2,0) \\
u_4 &= v_4 - \frac{(v_4,u_3)}{||u_3||^2}u_3 - \frac{(v_4,u_2)}{||u_2||^2}u_2 - \frac{(v_4,u_1)}{||u_1||^2}u_1 \\
&= (0,0,0,1) - 0 - \frac{-2}{3}.\frac{1}{3}(2,1,0,-2) - \frac{2}{3}.\frac{1}{3}(2,0,-1,2) \\
&= \frac{1}{9}(0,2,2,1)
\end{aligned}$$

   Ar ôl normaleiddio y fectorau yma, gwelir mai'r sylfaen orthonormal sy'n deillio yw

$$\{v_1 = \frac{1}{3}(2,0,-1,2), v_2 = \frac{1}{3}(2,1,0,-2), v_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2,0), v_4 = \frac{1}{3}(0,2,2,1)\}.$$

3. **Gadawer i V fod yr isofod o bolynomialau real o'r radd dim mwy na 3 yn $C[-1,1]$. Mae**

$$\{f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2, f_3 = x^3\}$$

yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i V. Trwy'r Weithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt darganfyddir yn gyntaf set o elfennau orthogonal $\{g_0, g_1, g_3, g_4\}$ fel â ganlyn

$$\begin{aligned}
g_0 &= f_0 = 1 \\
g_1 &= f_1 - \frac{(f_1, f_0)}{(f_0, f_0)} f_0 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} dx} 1 = x \\
g_2 &= f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0 \\
&= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} 1 \\
&= \frac{1}{3}(3x^2 - 1) \\
g_3 &= f_3 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(f_3, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0 \\
&= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{3}(3x^2 - 1)x^2 dx}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{9}(3x^2 - 1)^2 dx} \frac{1}{3}(3x^2 - 1) - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} dx} 1 \\
&= \frac{1}{5}(5x^3 - 3x)
\end{aligned}$$

I normaleiddio yr elfennau hyn, sylwer bod

$$(g_0, g_0) = 2,\ (g_1, g_1) = \frac{2}{3},\ (g_2, g_2) = \frac{8}{45},\ (g_3, g_3) = \frac{8}{175},$$

ac felly, y sylfaen orthonormal yw

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x) \right\}.$$

Y polynomialau hyn yw'r pedwar cyntaf o beth a elwir yn *bolynomialau Legendre* sydd o gryn bwys o fewn y pwnc o Analysis (am fwy o fanylion amdanynt ac am gymwysiadau eraill o ofodau lluoswm mewnol i analysis, megis cyfresi Fourier, gweler, er enghraifft, KKOP (*loc.cit.*)

Ymarferiadau 5.3

(Os na fynegir fel arall, yn yr ymarferiadau hyn y lluoswm mewnol bydd y lluoswm mewnol safonol)

1. Dangoswch fod y parau canlynol o elfennau yn orthogonal

- **(i)** $(2, 3, -2, 1, 0, 1)$ **a** $(2, -1, 1, 0, 2, 1)$ **yn** $V_6(\mathbb{R})$
- **(ii)** $(i, 1, -i)$ **a** $(1 - i, 2, 1 + i)$ **yn** $V_3(\mathbb{C})$
- **(iii)** 1 **a** $\cos \pi x$ **yn** $C[0, 1]$.

2. **Darganfyddwch yr holl fectorau sy'n orthogonal i'r canlynol**

(i) $(-1, 1, 2, -1)$ **yn** $V_4(\mathbb{R})$

(ii) $(1-i, 1+i)$ **yn** $V_2(\mathbb{C})$**.**

3. **Yn** $C[0,1]$**, dangoswch fod** $\cos 2m\pi x$ **a** $\cos 2n\pi x$ $m \neq n$ **yn orthogonal i'w gilydd. Darganfyddwch bolynomial cwadratig sy'n orthogonal i** 1 **a** x**. Ymhellach, darganfyddwch hyd** $\cos m\pi x$ **a darganfyddwch yr amod angenrheidiol a digonol fel bod** $a + bx$ **a** $c + dx$ **yn orthogonal yn** $C[0,1]$**.**

4. **Dangoswch fod** $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \ldots, \sin n\pi x$ **yn orthogonal yn** $C[0,1]$**. Darganfyddwch set o ffwythiannau orthonormal o'r set yma.**

5. **Defnyddiwch Weithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt i orthogonaleiddo**

(i) **{(1,-1,1),(2,1,1), (1,0,1)} yn** $V_3(\mathbb{R})$

(ii) **{(1,-1,1,1),(0,1,0,1), (2,-1,1,1)} yn** $V_4(\mathbb{R})$

(iii) **{(1,-1,i),(i,1,2)} yn** $V_3(\mathbb{C})$

6. **Cwblhewch i sylfaen orthonormal**

(i) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1,0)\}$ **i** $V_3(\mathbb{R})$

(ii) $\{\frac{1}{2}(1,i,1,i), \frac{1}{2}(i,1,i,1)\}$ **i** $V_4(\mathbb{C})$

7. **Darganfyddwch sylfaeni orthonormal i** $V_3(\mathbb{R})$ **i'r lluosymiau mewnol yn Ymarfer 2 yn Ymarferion 5.2.**

8. **Gadawer i** V **fod yr isofod o** $C[0,1]$ **sy'n cynnwys polynomialau real ar** $[0,1]$ **o'r radd dim mwy na** 3**. Defnyddiwch Weithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt i orthogonaleiddo y sylfaen-**$\mathbb{R}$ $\{1, x, x^2, x^3\}$ **i** V**.**

9. **Os yw** $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **yn sylfaen orthonormal i'r gofod lluoswm mewnol** V**, profwch y gellir mynegi pob** $v \in V$ **fel**

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, v_i) v_i.$$

(i) **Darganfyddwch sylfaen orthonormal i** $V_3(\mathbb{C})$ **a darganfyddwch gyfesurynnau o** $(1, i, -i)$ **mewn perthynas â'r sylfaen hwn.**

(ii) **Darganfyddwch sylfaen orthonormal i'r isofod o** $C[0,1]$ **sy'n cynnwys y polynomialau o'r radd dim mwy na** 2 **a darganfyddwch cyfesurynnau** $x^2 + 1$ **a** $x^2 - x + 1$ **mewn perthynas â'r sylfaen hwn.**

10. **Defnyddiwch Weithdrefn Orthogonaleiddo Gram-Schmidt i orthogonaleiddo y sylfaen-**$\mathbb{R}$ $\{1, x, x^2, x^3\}$ **i** $P_3(\mathbb{R})$ **lle diffinnir y lluoswm mewnol gan**

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x) dx.$$

11. **Gadawer i V fod yn ofod lluoswm mewnol o ddimensiwn meidraidd gyda'r sylfaen orthonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a gadawer i T fod yn drawsffurfiant llinol ar V. Profwch fod $(T)_{\mathcal{B}} = ((Tv_j, v_i))$.**

12. **Os yw V yn ofod ewclidaidd ac mae $u, v \in V$ fel bod $||u|| = ||v||$, profwch fod $u - v$ a $u + v$ yn orthogonal. Beth ddywed hyn am groesliniau rhombws?**

5.4 Cymwysiadau i Ranc Matricsau

Fel y gellir defnyddio'r gwaith uchod i brofi bod ranc colofn matrics yn hafal â'r ranc rhes, mae'n rhaid yn gyntaf gyflwyno ambell gysyniad ychwanegol. Am y rhan gyntaf o'r adran hon, gadawer i V sefyll am ofod-K mympwyol.

Diffiniad 5.9 ***Os yw U a W yn isofodau o V, yna gelwir V yn*** **swm union** ***o U a W, a ysgrifennir fel $U \oplus W$, os***

(i) ***mae $V = U + W$***

(ii) ***y gellir mynegi pob elfen $v \in V$ fel $v = u + w$, lle mae $u \in U$ a $w \in W$ yn unigryw.***

Mae'r lemma gyntaf yn rhoi criterion arall fel bod V yn swm union o U a W.

Lemma 5.10 ***Os yw $V = U + W$, yna mae $V = U \oplus W$ os a dim ond os yw $U \cap W = \{0\}$.***

PRAWF Os yw $v \in U \cap W$, yna mae $v \in U$ a $v \in W$, yna mae

$$v = v + o = o + v$$

a gan fod $V = U \oplus W$, ceir bod $v = 0$ ac felly, mae $U \cap W = \{0\}$.

I'r gwrthwyneb, cymerer bod $U \cap W = \{0\}$. Os yw $v \in V$, tybiwch fod $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, lle mae $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$ yn ddwy ffordd gwahanol o fynegi v. Yna, mae $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$, ac felly, mae $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$, hynny yw, mae $u_1 = u_2, w_1 = w_2$, ac felly mae'r mynegiant uchod o v yn unigryw.

Lemma 5.11 ***Os yw V yn ofod-K o ddimensiwn meidraidd ac U yn isofod o V, yna bodola isofod W o V, fel bod***

$$V = U \oplus W$$

ac mae $(V : K) = (U : K) + (W : K)$.

PRAWF Os yw $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ yn sylfaen-K i U, gellir ymestyn y sylfaen hwn i roi sylfaen-K $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ i V. Gadawer i W fod yr isofod o V a eneredir gan $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, yna mae'n dilyn bod $V = U \oplus W$ ac mae $(V : K) = (U : K) + (W : K)$.

O hyn ymlaen, gadawer i V fod yn ofod lluoswm mewnol.

Diffiniad 5.12 *Os yw S yn is-set o V,* cyflenwad orthogonal *S yw $S^\perp = \{x \in V \,|\, (x, s) = 0 \text{ am bob } s \in S\}$.*

Lemma 5.13 *Os yw S yn is-set o V, yna mae $S^\perp$ yn isofod o V.*

PRAWF Mae $S^\perp$ yn anwag gan fod $0 \in S^\perp$.

Os yw $u, v \in S^\perp, \alpha \in K$, yna mae

$$(\alpha u + v, s) = \alpha(u, s) + (v, s) = 0 \text{ am bob } s \in S$$

ac felly mae $\alpha u + v \in S^\perp$ ac mae $S^\perp$ yn isofod o V.

Theorem 5.14 *Gadawer i W fod yn isofod o'r gofod lluoswm mewnol o ddimensiwn meidraidd V, yna mae*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

PRAWF Mae'n glir y gellir cymryd bod $W \neq \{0\}$ a bod $W \neq V$. Os yw $(V : K) = n$ a $(W : K) = r < n$, yna trwy Theorem 5.8, mae gan W sylfaen orthonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$. Gellir ymestyn y sylfaen hwn i roi'r sylfaen-K $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ i V. Trwy weithredu'r Weithdrefn Orthogonaleiddio Gram-Schmidt i'r sylfaen-K hwn, ceir sylfaen orthonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ i V. Dangosir bod $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ yn sylfaen-K i $W^\perp$. Os yw $v \in W^\perp$, yna mae $v \in V$ ac felly mae $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Os yw $1 \leq i \leq r$, yna mae

$$0 = (v, w_i) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, w_i \right) = \alpha_i$$

ac mae $v = \sum_{j=r+1}^n \alpha_j w_j$, hynny yw, mae $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ yn generadu $W^\perp$.

I'r gwrthwyneb, mae pob cyfuniad llinol-K o $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$yn $W^\perp$, ac felly mae $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ yn sylfaen-K i $W^\perp$, a thrwy Lemma 5.11 mae $V = W \oplus W^\perp$.

Cymhwysir hyn yn awr i'r datrysiad o system o hafaliadau llinol. Ystyrir y system o hafaliadau llinol homogenaidd

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Os $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ a $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yna gellir cynrychioli'r system yma yn nhermau matricsau fel

$$Ax^t = 0.$$

Yn awr, gadawer i $r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \in V_n(K)\,(i = 1, 2, \ldots, m)$**, yna gellir cynrychioli y system hon fel**

$$(r_i, x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Gadawer i R_A **ddynodi'r isofod o** $V_n(K)$ **a eneredir gan** $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$**. Yna, sylwer mai'r gofod datrysiad yw** $R_A^{\perp}$**. Ond trwy Theorem 5.15, mae**

$$V_n(K) = R_A \oplus R_A^{\perp}$$

a dimensiwn yr ofod datrysiad yw $(R_A^{\perp} : K) = n - (R_A : K)$**, lle mae** $(R_A : K)$ **yw ranc rhes** A**. Ond, trwy Theorem 4.26, gwyddir mai dimensiwn yr ofod datrysiad yw** $n -$ **ranc golofn** A**. Felly, profwyd y theorem ganlynol.**

Theorem 5.15 ***Os yw*** $A \in M_{m,n}(K)$***, yna mae ranc rhes*** $A =$ ***ranc golofn*** A***.***

Rhaid nodi nad yw y prawf uchod ond yn ddilys dros y meysydd real a chymhlyg er bod y canlyniad yn parhau i fod yn wir dros feysydd mympwyol fel gwelwyd ym Mhennod 4. Gall y darllenydd weld sut i gymhwyso y prawf uchod i weithio yn yr achos cyffredinol, lle mae (iv) yn Niffiniad 5.2 wedi ei ddisodli gan amod arall (annirwedigaeth lluosymiau mewnol), sy'n caniatau i'r uchod gael ei gymhwyso i $V_n(K)$ **dros** K **mympwyol.**

Chapter 6

Diagonaleiddio Matricsau a Thrawsffurfiannau Llinol

6.1 Cyflwyniad

Os yw $A, B \in M_n(K)$, yna yn Niffiniad 4.5 ym Mhennod 4, diffiniwyd cyflunedd matricsau trwy ddweud bod B yn gyflun i A (a ysgrifennir yma fel $A \sim B$) os bodola matrics gwrthdro $P \in M_n(K)$ fel bod

$$B = P^{-1}AP.$$

Gellir profi'r lemma ganlynol yn hawdd

Lemma 6.1 *Mae cyflunedd matricsau yn berthynas cywerthedd ar $M_n(K)$.*

PRAWF Mae $\sim$ yn berthynas ymatblyg, gan fod $A = I_n^{-1}AI_n$ am bob $A \in M_n(K)$. Mae $\sim$ yn gymesur, gan, os yw $A \sim B$, yna bodola matrics gwrthdro P fel bod $B = P^{-1}AP$; o hyn gwelir bod $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, ac mae P^{-1} hefyd yn wrthdro, hynny yw, mae $B \sim A$. Hefyd, mae $\sim$ yn drosaidd; os yw $A \sim B$ a $B \sim C$, bodola matricsau gwrthdro $P, Q \in M_n(K)$ fel bod $B = P^{-1}AP$ a $C = Q^{-1}BQ$, ac felly mae $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, lle mae PQ yn fatrics gwrthdro yn $M_n(K)$, hynny yw, mae $A \sim C$.

Golyga hyn bod $M_n(K)$ yn cael ei ddosrannu i ddosbarthiadau cyflunedd o dan y berthynas gyflunedd hon. Felly, côd y cwestiwn o ddarganfod cynrychiolwyr o'r dosbarthiadau cyflunedd hyn mewn ffurf mor "syml" a phosibl. Dyna un o brif nôdau'r bennod hon. Gellir cyflwyno'r broblem hon hefyd yn nhermau trawsffurfiannau llinol hefyd.

Gadawer i V fod yn ofod-K o ddimensiwn meidraidd gyda $(V : K) = n$ a $T \in \mathcal{L}(V)$. Ym Mhennod 4, gwelwyd fod matricsau T mewn perthynas a gwahanol sylfaeni-K i V yn gyflun i'w gilydd. Felly, mae'r broblem uchod yn gyfystyr â'r broblem o ddarganfod sylfaen-K i V fel bod matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-K hwn mewn ffurf mor "syml" a phosibl. Dyna'r cymhelliad dros gyflwyno werthoedd-eigen a fectorau-eigen matrics (ac hefyd o drawsffurfiannau llinol) yn yr adran nesaf.

Gellir darlunio hyn ymhellach trwy ystyried enghraifft. Diffinnir trawsffurfiant llinol T ar $V_2(\mathbb{R})$ gan

$$\begin{aligned} Te_1 &= 2e_1 - e_2 \\ Te_2 &= 3e_1 - 2e_2 \end{aligned}$$

lle mae $\{e_1, e_2\}$ yw'r sylfaen safonol. Os yw $(\lambda, \mu) \in V_2(\mathbb{R})$ yn bwynt mympwyol, yna mae

$$\begin{aligned} T(\lambda, \mu) &= 2\lambda e_1 - \lambda e_2 + 3\mu e_1 - 2\mu e_2 \\ &= (2\lambda + 3\mu, -\lambda - 2\mu). \end{aligned}$$

Yn awr, gadawer i $e_1' = 3e_1 - e_2, e_2' = e_1 - e_2$, yna mae $\{e_1', e_2'\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i $V_2(\mathbb{R})$ ac mae

$$\begin{aligned} Te_1' &= 3T(e_1) - T(e_2) = 6e_1 - 3e_2 - 3e_1 + 2e_2 = 3e_1 - e_2 = e_1' \\ Te_2' &= T(e_1) - T(e_2) = 2e_1 - e_2 - 3e_1 + 2e_2 = -e_1 + e_2 = -e_2' \end{aligned}$$

ac felly mae $T(\lambda, \mu) = (\lambda, -\mu)$, lle mae (λ, μ) yn awr yw cyfesurynnau'r yr un pwynt mewn perthynas â'r sylfaen-$\mathbb{R}$ $\{e_1', e_2'\}$. Felly, mae effaith y trawsffurfiant llinol T ar unrhyw bwynt (neu fector) yn llawer mwy eglur wrth edrych arno mewn perthynas â'r ail sylfaen-$\mathbb{R}$, hynny yw, gwelir mai adlewyrchiad yn yr echel gyntaf e_1' yw T fel ddangosir yn Ffigwr 1. Felly, i ddarganfod delwedd y pwynt P yn y darlun, rhaid llunio llinell trwy P sy'n baralel i e_2', delwedd P fydd y pwynt P' fel bod $PX = XP'$, lle mae X yw'r pwynt lle mae'r llinell yn cwrdd â'r echel-e_1'.

6.2 Gwerthoedd-eigen a Fectorau-eigen

Diffiniad 6.2 ***(i) Os yw $A \in M_n(K)$, gelwir elfen $\lambda \in K$ yn*** **werth-eigen** ***o A os bodola fector ansero $X \in V_n(K)$ fel bod***

$$AX = \lambda X$$

(fector colofn yw X yma ac yn y cysylltiadau hyn). Gelwir y fector X y **fector-eigen** ***sy'n cyfateb i'r fector-eigen λ.***

(ii) Os yw V yn ofod-K o ddimensiwn n a $T \in \mathcal{L}(V)$ yna gelwir elfen $\lambda \in K$ yn **werth-eigen** ***o T os bodola fector ansero $v \in V$ fel bod***

$$Tv = \lambda v.$$

Gelwir y fector v y **fector-eigen** ***sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen λ.***

Dangosir y cysylltiad rhwng (i) a (ii) yn gliriach gan y canlynol:

Os A yw matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-K $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i V ac os yw λ yn werth-eigen i T gyda v yn fector-eigen cyfatebol a bod $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$,

yna rhodder $X = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$, yna mae $AX = \lambda X$, hynny yw, mae λ yn werth-eigen o A. Ymhellach, os yw $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ yn sylfaen-K arall i V, yna mae $(T)_{\mathcal{B}'} = PAP^{-1}$, lle mae $P = (p_{ij})$ a $v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i'$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ (gweler §4.3). Felly, mae

$$(PAP^{-1})(PX) = \lambda(PX),$$

hynny yw, mae λ hefyd yn werth-eigen o PAP^{-1} gyda'r fector-eigen PX cyfatebol (mae PX yn ansero gan fod P yn fatrics gwrthdro). Felly, gellid bod wedi diffinio gwerth-eigen trawsffurfiant llinol T fel y gwerth-eigen o fatrics T mewn perthynas ag *unrhyw* sylfaen-K i V.

O hyn ymlaen, canolbwyntir ar yr achos o fatricsau ond bydd y mynegiant cyfatebol am drawsffurfiannau llinol hefyd yn cael eu datgan weithiau. Mae'r prawf cyfatebol yn dilyn trwy'r ddadl uchod, er y gellid profi'r mynegiant yn uniongyrchol hefyd.

Os yw $\lambda \in K$ yn werth-eigen o $A \in M_n(K)$, yna bodola fector golofn ansero X fel bod

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Trwy Ganlyneb 2.10 mae X yn bodoli os a dim ond os yw $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Felly, profwyd y canlynol

Theorem 6.3 ***Mae $\lambda \in K$ yn werth-eigen o A os a dim ond os yw $\det(A - \lambda I_n) = 0$.***

Defnyddir y canlyniad hwn fel sail i'r diffiniad pwysig canlynol.

Diffiniad 6.4 ***Gelwir y polynomial $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$ yn* bolynomial nodweddiadol *y matrix A.***

Felly, gellid ail ddatgan Theorem 6.3 fel â ganlyn.

Theorem 6.5 ***Mae $\lambda \in K$ yn werth-eigen o A os a dim ond os yw yn wreiddyn o bolynomial nodweddiadol y matrics A.***

Rhy hyn fethod ymarferol i gyfrifo gwerthoedd-eigen y matrics A. Mae $\chi_A(x)$ yn bolynomial o radd n; trwy ddefnyddio'r theorem a elwir yn theorem sylfaenol algebra, mae pob polynomial o radd n dros y maes cymhlyg yn factoreiddio dros $\mathbb{C}$ i n factor llinol, hynny yw, os yw $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)$, lle mae $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, yna mae

$$\chi_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n),$$

lle mae $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Felly, dros y maes cymhlyg mae gan fatrics $n \times n$ ar y mwyaf n o werthoedd-eigen gwahanol ac o leiaf un. Hefyd, mae'n glir o hyn fod bodolaeth gwerthoedd-eigen yn ddibynnol ar y maes y gweithredir ynddo.

ENGHREIFFTIAU.

1. Os yw $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, yna mae

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1,$$

sy'n anostwng dros $\mathbb{R}$ (hynny yw, nid yw yn factoreiddio dros $\mathbb{R}$), ond mae'n factoreiddio dros $\mathbb{C}$ i roi

$$\chi_A(x) = (x+i)(x-i).$$

Felly nid oes gan A werthoedd-eigen dros $\mathbb{R}$ ond mae ganddo ddau dros $\mathbb{C}$, sef i a $-i$.

2. Os yw $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, yna mae

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)^2.$$

Mae gan A un gwerth-eigen yn unig dros $\mathbb{R}$ a hefyd dros $\mathbb{C}$.

Unwaith mae'r gwerthoedd-eigen wedi eu penderfynu, yna mae'n bosibl i gyfrifo'r fectorau-eigen cyfatebol. Os yw $A = (\alpha_{ij})$ ac os yw λ yn werth-eigen o A ac
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yw'r fector-eigen cyfatebol, yna gwelir o Ddiffiniad 6.2 mai X yw'r datrysiad annistadl o'r system o hafaliadau llinol

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}-\lambda)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + (\alpha_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

Mae datrysiad annistadl yn bendant yn bodoli gan fod $\det(A - I_n) = 0$. Gwelir ymhellach ymlaen (Theorem 6.10) nad yw'r nifer o ddatrysiadau annistadl llinol annibynnol yn fwy na lluosogrwydd $x - \lambda$ yn $\chi_A(x)$.

Cyfrifir y fectorau-eigen yn y ddwy enghraifft uchod. Os yw $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, yn gyfatebol i'r gwerth-eigen i, rhaid datrys yr hafaliadau

$$\begin{aligned} -ix_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 - ix_2 &= 0. \end{aligned}$$

Trwy ostyngiad rhes gwelir bod

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ac felly, mae holl ddatrysiadau'r system o'r ffurf $\alpha(1, i)$, $\alpha \in \mathbb{C}$; felly mae $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ yn fector-eigen sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen i, hynny yw, mae

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Yn yr un modd, os yw $\lambda = -i$, ceir bod

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ac $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ yw'r fector-eigen sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen $-i$.

Yn yr ail enghraifft, os yw $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, yna mae $\chi_A(x) = (\lambda - 1)^2$ gyda ond un gwerth-eigen 1, yna mae

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sy'n arwain i'r canlyniad mai dim ond un fector-eigen llinol annibynnol $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen $\lambda = 1$.

ENGHRAIFFT Fel enghraifft ychwanegol ystyrier y matrics

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

yna rhoddir y polynomial nodweddiadol gan

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ 2 & -x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 4 \\ 0 & -x & 2 \\ 1+x & 2 & 3-x \end{vmatrix} \\
&= (1+x) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} -x & 2 \\ 4 & 7-x \end{vmatrix} \\
&= -(x+1)^2(x-8).
\end{aligned}$$

Y gwerthoedd-eigen felly dros $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ yw -1 a 8. Yn cyfateb i'r gwerth-eigen $\lambda = -1$, ceir y system o hafaliadau llinol

$$\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\
4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0,
\end{aligned}$$

sy'n gostwng i'r un hafaliad

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \quad = \quad 0$$

neu

$$x_2 \quad = \quad -2x_1 - 2x_3,$$

ac mae $(1, -2, 0)$ **a** $(0, -2, 1)$ **yn ddau ddatrysiad llinol annibynnol. Felly, yn cyfateb i'r gwerth-eigen** $\lambda = -1$**, mae dau fector-eigen llinol annibynnol** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **a** $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$**. Os yw** $\lambda = 8$**, yna mae**

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ac mae $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **yn fector-eigen sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen** $\lambda = 8$**.**

Er mwyn ymestyn y syniadau uchod i drawsffurfiannau llinol profir y lemma canlynol.

Lemma 6.6 ***Mae gan fatricsau cyflun yr un polynomial nodweddiadol ac felly yr un gwerthoedd-eigen.***

PRAWF Os yw A **a** B **yn fatricsau cyflun, yna bodola matrics gwrthdro** P **fel bod** $B = PAP^{-1}$**. Felly, polynomial nodweddiadol** B **yw**

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - xI_n) = \det(PAP^{-1} - xI_n) \\ &= \det(P(A - xI_n)P^{-1}) \\ &= (\det P)\det(A - xI_n)\det(P^{-1}) \\ &= \det(A - xI_n) \\ &= \chi_A(x) \end{aligned}$$

lle defnyddiwyd y ffaith fod y ffwythiant determinant yn lluosol (gweler Canlyneb 3.9) a bod $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$**.**

Felly, os yw T **yn drawsffurfiant llinol, gan bod matricsau** T **mewn perthynas a gwahanol sylfaeni-**K **yn gyflun i'w gilydd (gweler Theorem 4.7) mae'r diffiniad canlynol o bolynomial nodwediadol** T **yn anamwys.**

Diffiniad 6.7 ***Os yw*** $T \in \mathcal{L}(V)$***, yna*** **polynomial nodweddiadol** T ***yw polynomial nodweddiadol unrhyw fatrics o*** T ***mewn perthynas ac unrhyw sylfaen-***K ***o*** V***.***

Gellir profi y lemma ganlynol.

Lemma 6.8 ***Gadawer i λ fod yn werth-eigen o $A \in M_n(K)(T \in \mathcal{L}(V))$ a gadawer i $V(\lambda)$ ddynodi'r set o fectorau-eigen sy'n cyfateb i λ gan hefyd gynnwys y fector sero. Yna, mae $V(\lambda)$ yn isofod o $V_n(K)\,(V)$.***

PRAWF Mae'n glir mai gofod hafaliad y system o hafaliadau llinol a cynrychiolir gan

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

yw $V(\lambda)$. Felly (gweler Enghraifft 4 yn §3.3) mae $V(\lambda)$ yn isofod o $V_n(K)$. (Yn yr un modd, os yw $T \in \mathcal{L}(V)$, yna mae $V(\lambda) = \ker(T - \lambda I_V)$, ac felly thrwy Lemma 4.8 mae $V(\lambda)$ yn isofod V).

Diffiniad 6.9 ***Gelwir $V(\lambda)$ yr*** **ofod-eigen** ***sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen λ.***

Mae'r theorem nesaf yn rhoi terfan uchod i ddimensiwn $V(\lambda)$, sef terfan uchod i'r nifer o fectorau-eigen llinol annibynnol sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen λ.

Theorem 6.10 ***Os yw λ yn werth-eigen o $A \in M_n(K)(T \in \mathcal{L}(V))$, yna mae $(V(\lambda) : K) \leq$ lluosrwydd $(x-\lambda)$ fel ffactor o'r polynomial nodweddiadol $\chi_A(x)(\chi_T(x))$.***

PRAWF Rhoddir y prawf yn yr achos yma yn nhermau trawsffurfiannau llinol.

Gadawer i $(V(\lambda) : K) = r$ a gadawer i $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ fod yn sylfaen-K i $V(\lambda)$ a estynnir i roi'r sylfaen-K $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ i V. Yna ceir bod $Tv_j = \lambda v_j\ (j = 1, 2, \ldots, r)$ ac felly, mae

$$(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

lle mae A yn fatrics $(n-r) \times (n-r)$, B yn fatrics $r \times (n-r)$ a 0 yw'r matrics sero $(n-r) \times r$. Yna mae

$$\begin{aligned} \chi_T(x) &= \det((T)_{\mathcal{B}} - xI_n) \\ &= (\lambda - x)^r \det(A - xI_{n-r}). \end{aligned}$$

Felly, mae $(\lambda - x)^r$ yn ffactor o bolynomial nodweddiadol T ac felly nid yw r yn fwy na lluosogrwydd $(x - \lambda)$ fel ffactor o bolynomial nodweddiadol $\chi_T(x)$ o T.

Ymarferiadau 6.3

1. **Darganfyddwch werthoedd-eigen y matricsau canlynol dros**
   (a) **y maes cymarebol $\mathbb{Q}$**
   (b) **y maes real $\mathbb{R}$**
   (c) **y maes cymhlyg $\mathbb{C}$.**

(i) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Darganfyddwch polynomial nodweddiadol, gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen y matricsau canlynol dros y maes cymhlyg

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 2 & i & 1+2i \\ -i & 0 & -i \\ 1-2i & i & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(v)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(vi)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. Os yw $A, B \in M_n(K)$, profwch fod gan AB a BA yr un gwerthoedd-eigen.

4. Os yw $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yn werthoedd-eigen $A \in M_n(K)$, profwch

(i) os yw A yn wrthdro, yna $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n$ yw gwerthoedd-eigen A^{-1}.

**(ii) mai $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ yw gwerthoedd-eigen A^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.
Beth yw y fectorau-eigen cyfatebol?**

5. Darganfyddwch gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen y trawsffurfiant differol D ar $P_n(\mathbb{R})$.

6. Os yw $A \in M_n(K)$, profwch fod gan A a A^t yr un gwerthoedd-eigen.

7. Darganfyddwch gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen o'r trawsffurfiannau llinol o adlewyrchiad a cylchdro ar $V_2(\mathbb{R})$ dros y maes real.

8. Darganfyddwch polynomial nodweddiadol y matricsau $n \times n$ canlynol.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1+b & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a & a^2+b & \cdots & a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}+b \end{pmatrix}$.

6.3 Croeslinio Matricsau

Diffiniad 6.11 *(i) Mae matrics $A \in M_n(K)$ yn* groesliniol *os bodola matrics gwrthdro P fel bod $P^{-1}AP$ yn fatrics croeslin.*

(ii) Mae trawsffurfiant llinol $T \in \mathcal{L}(V)$ yn groesliniol *os bodola sylfaen-K i V fel bod matrics T mewn perthynas â'r sylfaen-K hwn yn fatrics croeslin.*

Mae'n glir o beth ddywedwyd yn barod fod y ddau ddiffiniad yma'n gywerth.

Profir yn awr amod angenrheidiol a digonol fel bod matrics yn groesliniol.

Theorem 6.12 *Mae matrics $A \in M_n(K)$ (trawsffurfiant llinol $T \in \mathcal{L}(V)$ yn groesliniol os a dim ond os bod set o fectorau-eigen o A (T) yn ffurfio sylfaen-K i $V_n(K)$ (V).*

PRAWF Os yw A yn groesliniol, yna trwy Ddiffiniad 6.10 bodola matrics gwrthdro P fel bod

$$P^{-1}AP = D = \textbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

am rhyw $\lambda_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Gan fod gan fatricsau cymesur yr un gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen, yna gwerthoedd-eigen A yw $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Gadawer i $P = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, lle mae $C_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ yw colofnau y matrics P. Gan bod P yn wrthdro, mae $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ yn llinol annibynnol dros K ac felly yn ffurfio sylfaen-K i $V_n(K)$. Yn awr, mae

$$AP = PD$$

neu

$$A(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (C_1, C_2, \ldots, C_n)\,\textbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

sy'n golygu bod

$$AC_i = \lambda_i C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

hynny yw, mae C_i yn fector-eigen yn cyfateb i'r gwerth-eigen λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ o A.

I'r gwrthwyneb, gadawer i $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ fod yn set llinol annibynnol o fectorau-eigen o'r matrics A. Cymerer bod yr fectorau-eigen hyn yn cyfateb i'r gwerthoedd-eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (dim o angenrhaid yn wahanol i'w gilydd). Gan bod $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ yn llinol annibynnol dros K, os mae $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yw'r matrics $n \times n$ a ffurfir gyda $X_i\,(1, 2, \ldots, n)$ fel ei golofnau. Yna, trwy Theorem 3.14, mae P yn fatrics gwrthdro,. Trwy wyrdroi y ddadl uchod, ceir bod

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sy'n arwain i'r canlyniad

$$P^{-1}AP = \textbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Golyga y theorem yma os yw matrics A yn groesliniol yna mae $\chi_A(x)$ yn ffactoreiddio'n gyflawn i ffactorau llinol.

Gellir profi yn awr y theorem ganlynol sy'n arddangos un sefyllfa lle mae matrics yn groesliniol.

Theorem 6.13 ***Os oes gan*** $A \in M_n(K)$ ***(***$T \in \mathcal{L}(V)$***)*** n ***gwerth-eigen gwahanol, yna mae*** A ***(***T***) yn groesliniol.***

PRAWF Gadawer i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ fod yn n gwerth-eigen gwahanol o'r matric A a $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y gwerthoedd-eigen cyfatebol yn ôl eu trefn, felly mae $AX_i = \lambda_i X_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$. Felly, yn ôl Theorem 6.11 uchod, bydd y prawf yn gyflawn ond profi bod $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ yn set llinol annibynnol. Gwneir hynny trwy ddefnyddio prawf anwythol ar n. Mae'r canlyniad yn amlwg wir pan mae $n = 1$, Cymerir bod $\{X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}\}$ yn llinol annibynnol dro K lle mae $1 \leq r - 1 < n$. Ystyrier

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r = 0$$

lle mae $\alpha_i \in K \, (i = 1, 2, \ldots, r)$. Trwy gynluosi gyda A ceir bod

$$\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \cdots + \alpha_r \lambda_r X_r = 0$$

a thrwy dynnu hwn allan o'r hafaliad blaenorol wedi ei luosi gyda λ_r ceir bod

$$\alpha_1(\lambda_r - \lambda_1)X_1 + \alpha_2(\lambda_r - \lambda_2)X_2 + \cdots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r-1})X_{r-1} = 0.$$

Ond mae $\{X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}\}$ yn llinol annibynnol dro K ac felly mae

$$\alpha_i(\lambda_r - \lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r - 1).$$

Ymhellach, gan bod y gwerthoedd-eigen yn wahanol i'w gilydd, mae $(\lambda_r - \lambda_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r - 1)$ ac felly mae $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$, sy'n arwain i $\alpha_r X_r = 0$ a gan bod $X_r \neq 0$, mae $\alpha_r = 0$ hefyd. Hynny yw, mae $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ yn llinol annibynnol dros K, $(1 \leq r \leq n)$.

O brawf Theorem 6.10 a Theorem 6.12 mae'r ganlyneb ganlynol yn awr yn dilyn.

Canlyneb 6.14 ***Os yw*** $A \in M_n(K)$ ***yn groesliniol, yna mae*** $(V_n(K) : K)$ ***yn hafal â lluosogrwydd*** $(x - \lambda)$ ***fel ffactor yn*** $\chi_A(x)$ ***am bob gwerth-eigen*** λ ***o*** A***.***

Nodir hefyd bod y gwrthwyneb yn wir pan mae'r polynomial nodweddiadol yn ffactoreiddio yn gyflawn i ffactorau llinol, er engraifft, pan mae $K = \mathbb{C}$.

Yn yr enghreifftiau canlynol, defnyddir y canlyniadau o'r enghreifftiau blaenorol yn §6.2.

ENGHREIFFTIAU

1. Os yw $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**, rhodder** $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ **yna mae**

$$P^{-1}AP = \mathbf{diag}\,(i, -i).$$

2. Os yw $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**, yna gan mai** $(1, -1)$ **yw'r unig fector-eigen llinol annibynnol sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen** 1**, yna mae** $(V(1) : \mathbb{R}) = 1$**, a thrwy Theorem 6.12 felly nid yw** A **yn groesliniol.**

3. Os yw $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$**, yna y gwerthoedd-eigen yw** -1 **a** 8**. Gwelwyd bod** $\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$ **yn sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V(-1)$ **ac mae** $\{(2, 1, 2)\}$ **yn sylfaen-**$\mathbb{R}$ **i** $V(8)$**. Os rhoddir**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

yna mae

$$P^{-1}AP = \mathbf{diag}\,(-1, -1, 8).$$

Cyn mynd dim pellach, asesir pa mor lwyddiannus bu'r ymdrechion i gyrraedd brif nôd y bennod hon sef i ddarganfod matrics 'syml' i gynrychioli dosbarthiadau cywerth i'r berthynas cywerthedd o gyflunedd. O tan amgylchiadau arbennig, gwelwyd mai'r ffurf syml hon oedd matrics croeslin. Ond fel gwelwyd yn Enghraifft 2 uchod, nid yw'n bosibl bob amser i gyrraedd y nôd ddelfrydol hon. Yn awr, cyflwynir ateb i'r cwestiwn hwn - ond ni ymdrechir gyflwyno unrhyw brawf o'r canlyniad gan fod hynny allan o gyrraeddiad y llyfr hwn.

Cymerir mai'r maes yw y maes cymhlyg $K = \mathbb{C}$**.**

Gadawer i bolynomial nodweddiadol $A \in M_n(K)$ **gymeryd y ffurf**

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_s)^{n_s}$$

le mae $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ **yw'r** s **gwerth-eigen gwahanol sydd gan** A **ac lle mae** $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$**. Gadawer i**

$$J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in M_r(K).$$

Yn awr, os yw $m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{is_i}$ **yn gyfanrifau positif fel bod** $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \ldots \geq m_{is_i}$ **a** $m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{is_i} = n_i$**, yna gadawer i**

$$J(n_i) = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, m_{i1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, m_{i2}) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J(\lambda_i, m_{is_i}) \end{pmatrix}$$

yna, mae'r matrics A **yn gyflun â**

$$\begin{pmatrix} J(n_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J(n_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J(n_s) \end{pmatrix},$$

am rhyw ddewis o $m_{ij}\,(i = 1, 2, \ldots, s;\, j = 1, 2, \ldots, s_i)$ **sy'n bodlonni y gofynion uchod. Gelwir y fath** J **yn Ffurf Ganonaidd Jordan o'r matrics** A**. Nodir felly, fod gan** J **werthoedd-eigen** A **fel elfennau croeslinol a gyda dosbarthiad o seroau ac unoedd fel elfennau uwchgroeslin a seroau ymhob safle arall.**

Gwelir hyn yn gliriach efallai trwy ystyried enghraifft. Os yw $n = 3$**, mae pob matrics** 3×3 A **gyda elfennau cymhlyg yn gyflun ag un o'r canlynol**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

lle mae λ, μ, ν **yw gwerthoedd-eigen** A**.**

Ymarferiadau 6.3

1. **Lle mae'n bosibl, darganfyddwch matrics gwrthdro** P **fel bod** $P^{-1}AP$ **yn fatrics croeslin os yw** A **yn**

$$\textbf{(i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(iii)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(iv)} \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \textbf{(v)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(vi)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(vii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Darganfyddwch werthoedd-eigen a fectorau-eigen y ddau fatrics canlynol.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dros $\mathbb{Q}$. Dangoswch fod A yn gyflun i fatrics croeslin ac eglurwch pam nad yw B. Darganfyddwch fatrics gwrthdro P fel bod $P^{-1}AP$ yn fatrics croeslin.

3. Darganfyddwch werthoedd-eigen y matrics

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Darganfyddwch fatrics gwrthdro P fel bod $P^{-1}AP$ yn fatrics croeslin.

4. Os yw $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ac os yw P yn fatrics gwrthdro, trwy ystyried $(P^{-1}AP)^n$, darganfyddwch A^n, am bob integryn positif n.

5. Darganfyddwch fatrics gwrthdro P fel bod $P^{-1}AP$ yn fatrics croeslin os yw

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Felly, darganfyddwch fatrics $X(\neq \pm A)$ sy'n bodlonni $X^2 = A$.

6.4 Polynomial Minimwm Matrics a Theorem Cayley-Hamilton

Yn yr adran hon, cymerir mai K yw'r maes cymhlyg.

Yn §3.4, gwelwyd bod $(M_n(K) : K) = n^2$. Felly, os yw $A \in M_n(K)$, yna mae'r set $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ yn llinol ddibynnol dros K; felly bodola $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2} \in K$, nid oll yn sero, fel bod

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0.$$

Os rhoddir

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n^2} x^{n^2}$$

yna mae

$$f(A) = 0.$$

Yn awr, os yw m yn integryn positif fel bod $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ yn llinol annibynnol dros K ond bod $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^m\}$ yn llinol ddibynnol dros K, yna bodola
$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ gyda $\beta_m \neq 0$ fel bod

$$\beta_0 I_n + \beta_1 A + \cdots + \beta_m A^m = 0$$

neu

$$\gamma_0 I_n + \gamma_1 A + \cdots + \gamma_{m-1} A^{m-1} + A^m = 0,$$

lle mae $\gamma_i = \beta_i/\beta_m \, (i = 0, 1, \ldots, m-1)$. Felly, bodola polynomial monig $f(x)$ o'r radd $m \leq n^2$ fel bod $f(A) = 0$. Mae hyn yn cyfiawnhau y diffiniad canlynol

Diffiniad 6.15 Polynomial minimal ***matrics $A \in M_n(K)$ yw y polynomial monig $m(x)$ o'r radd lleiaf posibl fel bod $m(A) = 0$.***

Mae'r drafodaeth uchod yn profi fod y fath bolynomial yn bod a'i fod o'r radd ar y mwyaf n^2. Y bwriad yn awr yw darganfod cyfyngiadau pellach ar radd y polynomial minimwm fydd o gryn ddefnydd wrth ei enrhifo.

Gellir, diffinio polynomial minimwm trawsffurfiant llinol $T \in \mathcal{L}(V)$ mewn modd cyffelyb gan ddefnyddio yr union yr un dadleuon yn yr ofod fector $\mathbb{L}(V)$.

Yn awr profir sawl lemma sy'n ymwneud â'r polynomial minimwm.

Lemma 6.16 ***Mae polynomial mimimwm matrics $A \in M_n(K)$ yn unigryw.***

PRAWF Gadawer i $m(x)$ a $m'(x)$ fod yn bolynomialau minimwm o'r matrics A. Yna mae'n glir bod y ddau bolinomisl o'r un radd. Gadawer i $f(x) = m(x) - m'(x)$, yna mae $f(x)$ o radd is na mx a $m'(x)$ (gan bod y ddau bolynomial yn monig) ac hefyd, mae $f(A) = m(A) - m'(A) = 0$, sy'n arwain i bolynomial monig o radd llai na gradd $m(x)$ a $m'(x)$ sy'n bodlonni y diffiniad o bolynomial minimum ac felly sy'n gwrthddweud y diffiniad o'r polynomial minimum. Felly, mae $m(x) - m'(x) = 0$, neu $m(x) = m'(x)$.

Lemma 6.17 ***Mae'r polynomial minimwm $m(x)$ o fatrics A yn rhannu yn unioni bob polynomial $f(x)$ sy'n bodlonni $f(A) = 0$.***

PRAWF Dywed yr algorithm rhannu polynomialau y bodola polynomialau $q(x)$ a $r(x)$ fel bod

$$f(x) = q(x)m(x) + r(x)$$

lle mae $r(x) = 0$ neu mae gradd $r(x) <$ gradd $m(x)$. Yn awr, mae

$$r(A) = f(A) - q(A)m(A) = 0$$

sy'n golygu bod gradd $r(x) \geq 1$; hynny yw, mae $r(x)$ yn bolynomial o radd llai na gradd $m(x)$ sy'n bodlonni'r gofyniadau am bolynomial minimwm. Felly, mae $r(x) = 0$ a $m(x)$ yn rhannu yn union i $f(x)$.

Lemma 6.18 ***Mae gan fatricsau cyflun yr un polynomial minimwm.***

PRAWF Os yw $A, B \in M_n(K)$ yn gyflun, bodola matrics gwrthdro P fel bod

$$P^{-1}AP = B.$$

Mae'n hawdd profi trwy ddefnyddio prawf anwythol, am bob $k \geq 1$, bod

$$P^{-1}A^kP = B^k,$$

ac os yw $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m$, yna mae

$$\begin{aligned} f(B) &= \alpha_0 I_n + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \cdots + \alpha_m B^m \\ &= \alpha_0 P^{-1}P + \alpha_1 P^{-1}AP + \alpha_2 P^{-1}A^2P + \cdots + \alpha_m P^{-1}A^mP \\ &= P^{-1}f(A)P. \end{aligned}$$

Felly, os yw $f(A) = 0$ yna mae $f(B) = 0$ ac i'r gwrthwyneb. Mae'r canlyniad yn awr yn dilyn o Lemma 6.16

Yn awr, profir theorem bwysig syn rhoi cyfyngiadau pellach ar radd y polynomial minimwm, yn wir, gwelir bod gradd $m(x) \leq n$ os yw $A \in M_n(K)$.

Theorem 6.19 ***(Theorem Cayley-Hamilton) Os $\chi_A(x)$ yw polynomial nodweddiadol A, yna mae $\chi_A(A) = 0$, neu, mewn geiriau, "mae pob matrics yn bodlonni ei bolynomial nodweddiadol".***

PRAWF Os yw $A \in M_n(K)$, gadawer i bolynomial nodweddiadol A fod yn

$$\chi_A(x) = (-1)^n(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n).$$

Trwy §2.4, ceir bod

$$(A - xI_n)\,\mathbf{adj}\,(A - xI_n) = |A - xI_n|I_n = \chi_A(x)I_n.$$

Yn awr, trwy ystyried ffurf adj $(A - xI_n)$, ceir bod

$$\mathbf{adj}\,(A - xI_n) = (p_{ij}(x)),$$

lle mae'r $p_{ij}(x)$ yn bolynomialau o'r radd ar y mwyaf $n - 1$ yn x. Felly, gellir mynegi adj $(A - xI_n)$ yn y ffurf

$$\mathbf{adj}\,(A - xI_n) = B_0 + B_2 x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}$$

am rhyw fatricsau $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_n(K)$. Trwy gymharu cyfernodau y pwerau o x yn

$$(A - xI_n)(B_0 + B_2 x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}) = (-1)^n(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)I_n$$

ceir bod

$$\begin{aligned} AB_0 &= (-1)^n a_n I_n \\ -B_0 + AB_1 &= (-1)^n a_{n-1} I_n \\ -B_1 + AB_2 &= (-1)^n a_{n-2} I_n \\ &\vdots \\ -B_{n-2} + AB_{n-1} &= (-1)^n a_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n. \end{aligned}$$

Trwy gynluosi yr hafaliadau hyn yn awr gyda $I_n, A, A^2, \dots, A^n$ yn ôl eu trefn ac yna adio ceir bod

$$0 = (-1)^n(a_n + a_{n-1}A + \cdots + a^n) = \chi_A(A)$$

fel oedd ei eisiau.

Mae'r canlyniadau hyn yn rhoi ar eu hunion y ganlyneb ganlynol.

Canlyneb 6.20 ***Mae polynomial minimwm unrhyw fatrics yn rhannu ei bolynomial nodweddiadol.***

PRAWF Mae hyn yn dilyn ar ei union o'r theorem uchod a Lemma 6.17

ENGHREIFFTIAU

1. **Os yw $A =$ diag $(1, 0, -1)$, yna mae'n amlwg mai polynomial nodweddiadol A yw $\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 - \lambda$. Gwelir bod $A^2 =$ diag $(1, 0, 1)$ a $A^3 =$ diag $(1, 0, -1)$ ac mae'n amlwg nad oes perthynas o'r radd llai na $A^3 - A = 0$ yn bod, felly mae'r polynomial minimwm a'r polynomial nodweddiadol yn hafal yn yr achos yma.**

2. **Os yw $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, yna polynomial nodweddiadol A yw x^3. Gan bod $A^2 = 0$ ac $A \neq 0$, polynomial minimwm A yw x^2. Felly, gwelir yn gyffredinol nad yw'r polynomial nodweddiadol a'r polynomial minimwm yn hafal i'w gilydd.**

Theorem 6.21 ***Mae gwahanol ffactorau llinol o'r polynomial minimwm yn cytuno gyda rhai y polynomial nodweddiadol.***

PRAWF Gadawer i bolynomial nodweddiadol A fod yn

$$\chi_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

lle mae $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ yw gwerthoedd-eigen gwahanol A. Yna trwy Ganlyneb 6.20 uchod mae

$$m(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{l_1}(x - \lambda_2)^{l_2} \dots (x - \lambda_k)^{l_k}$$

lle mae $0 \leq l_i \leq m_i \, (i = 1, 2, \dots, k)$. Mae'n rhaid profi bod $l_i > 0$ am bob $i = 1, 2, \dots, k$.

Cymerer bod $l_j = 0$ am rhyw $1 \leq j \leq k$, yna mae $m(\lambda_j) \neq 0$. Ond, os yw λ yn werth-eigen o A, yna bodola fector ansero $X \in V_n(K)$ fel bod

$$AX = \lambda X,$$

a thrwy ddadl anwythol, mae

$$A^k X = \lambda^k X$$

am bob $k = 1, 2, \ldots$ ac ymhellach mae

$$m(A)X = m(\lambda)X.$$

Felly, pe bae $m(\lambda) \neq 0$ am rhyw werth-eigen λ, byddai hynny yn golygu bod $m(A) \neq 0$ a fyddai'n gwrthddweud diffinad y polynomial minimwm. Felly, mae'n amhosibl i fath werth-eigen λ_j fel yr uchod fodoli ac felly, fel oedd ei eisiau, mae $l_j > 0$ am bob $j = 1, 2, \ldots, k$.

Canlyneb 6.22 ***Os oes gan fatrics $A \in M_n(K)$ n gwerth-eigen gwahanol, yna mae'r polynomial minimwm a'r polynomial nodweddiadol yn hafal i'w gilydd.***

Gellir yn awr fynegi criterion pwysig i ddweud pryd mae matrics yn groesliniol yn nhermau ei bolynomoal minimwm. Ni roddir prawf o hyn.

Theorem 6.23 ***Mae matrics $A \in M_n(K)$ gyda k gwerth-eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ gwahanol yn un croesliniol os a dim ond os mai polynomial minimwm A yw $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots, (x - \lambda_k)$.***

ENGHREIFFTIAU

1. Os yw

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

yna y polynomial nodweddiadol yw $(x-1)^2(x-2)^2$. Trwy Theorem 6.21, y polynomial minimwm yw un o'r canlynol (i) $(x-1)(x-2)$; (ii) $(x-1)^2(x-2)$; (iii) $(x-1)(x-2)^2$ (iv) $(x-1)^2(x-2)^2$. Darganfyddir y polynomial minimwm yn awr trwy ddileu y posibiliadau yn systematic.

$$\begin{aligned} (A - I_n)(A - 2I_n) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \\ (A - I_n)^2(A - 2I_n) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Felly, y polynomial minimwm yw $(x-1)^2(x-2)$ ac felly nid yw'r matrics A yn groeslinol.

2. Os yw

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

yna'r polynomial nodweddiadol yw $-(x+1)^2(x-8)$**. Gwelir bod**

$$(A+I_n)(A-8I_n) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 0$$

ac felly polynomial minimwm A **yw** $(x+1)(x-8)$ **ac felly mae'r matrics yn groesliniol (fel gwelwyd yn barod yn §6.3 Enghraifft 3).**

Ymarferion 6.4

1. Darganfyddwch bolynomial minimwm y matricsau canlynol

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Darganfyddwch bolynomial minimwm a polynomial nodweddiadol y matrics canlynol

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Os yw $f(x)$ **yn bolynomial o radd** n**, darganfyddwch matrics** $n \times n$ **gyda** $f(x)$ **yn bolynomial minimwm iddo.**

3. Os oes gan y matrics A **y polynomial nodweddiadol** $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)$ **, darganfyddwch pob polynomial minimwm o** A **sy'n bosibl. Darganfyddwch fatricsau sydd gan y polynomialau hyn fel eu polynomialau minimwm.**

4. Cyflwynwch brawf uniongyrchol o Theorem Cayley-Hamilton am (i) matricsau croeslin (ii) matricsau triongl.

5. Trwy enrhifo'r polynomial minimwm, penderfynwch pa rai o'r matricsau canlynol sy'n groesliniol

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(iv)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.5 Croeslinio Matricsau Cymesur

Gadawer i $M_n^{(s)}(\mathbb{R})$ ddynodi'r set o fatricsau $n \times n$ gymesur real. Gwelir yn yr adran hon ei bod yn bosibl datrys y broblem a ystyriwyd yn §6.3 yn gyflawn yn yr achos yma.

Diffiniad 6.24 ***Dywedir bod matricsau*** $A, B \in M_n^{(s)}(\mathbb{R})$ ***yn* gyflun orthogonal *os bodola matrics orthogonal*** $P \in M_n(\mathbb{R})$ ***fel bod***

$$B = P^t AP.$$

(Noder, os yw P yn fatrics orthogonal, yna mae $P^tP = PP^t = I_n$ ac felly mae $P^{-1} = P^t$).

Yn gyntaf, profir dau lemma.

Lemma 6.25 ***Mae gwerthoedd-eigen matrics gymesur real i gyd yn real.***

PRAWF Gadawer i $A \in M_n^{(s)}(\mathbb{R})$ a λ fod yn werth-eigen o A gyda'r fector-eigen X, yna mae

$$AX = \lambda X.$$

Trwy gymeryd cyfieuau cymhlyg ac yna'r trawsddodynnau, ceir bod

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

a

$$\bar{X}^t \bar{A}^t = \bar{\lambda}\bar{X}^t.$$

Felly, gan fod $\bar{A}^t = A$ ceir

$$\bar{X}^t AX = \bar{\lambda}\bar{X}^t X = \lambda \bar{X}^t X$$

ac o hynny mae'n dilyn bod

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{X}^t X) = 0.$$

Yn awr, os yw $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yna mae

$$\bar{X}^t X = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$$

ac felly mae $\bar{\lambda} = \lambda$ ac mae λ yn real.

Lemma 6.26 ***Os yw gwerthoedd-eigen matrics gymesur real A i gyd yn wahanol, yna mae'r fectorau-eigen cyfatebol yn orthogonal i'w gilydd.***

PRAWF Gadawer i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ fod yr n gwerth-eigen gwahanol i A gyda'r fectorau-eigen cyfatebol $X_1, X_2, \ldots, X_n$, hynny yw, mae

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Rhaid profi bod

$$(X_i, X_j) = X_i^t X_j = 0 \quad \textbf{os yw } i \neq j.$$

Ceir bod

$$X_i^t A = \lambda_i X_i^t$$

ac

$$X_i^t A X_j = \lambda_i X_i^t X_j = \lambda_j X_i^t X_j$$

neu

$$(\lambda_i - \lambda_j) X_i^t X_j = 0;$$

o hyn mae'n dilyn bod $X_i^t X_j = 0$ gan bod $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$.

O'r ddau ganlyniad yma, mae'r theorem ganlynol yn dilyn.

Theorem 6.27 ***Os yw A yn fatrics gymesur real gyda gwerthoedd-eigen sydd i gyd yn wahanol, yna mae A yn gyflun orthogonal i fatrics croeslin.***

PRAWF Gadawer i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ fod yr n gwerth-eigen gwahanol i A gyda'r fectorau-eigen cyfatebol $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Rhodder $Y_i = X_i/|X_i| \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ a rhodder
$P = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, yna mae P yn fatrics orthogonal gan bod $(Y_i, Y_j) = 0 \, (i \neq j)$ (trwy Lemma 6.26 uchod) a $(Y_i, Y_i) = 1 \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Hefyd mae $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ yn fectorau-eigen sy'n cyfateb i'r gwerthoedd-eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yn ôl eu trefn. Felly, trwy Theorem 6.13 mae'n dilyn bod

$$P^t A P = P^{-1} A P = \textbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Yn y theorem nesaf gwelir bod y canlyniad yma'n parhau i fod yn wir hyd yn oed pan nad yw'r gwerthoedd-eigen yn wahanol i'w gilydd.

Theorem 6.28 ***Os yw A yn fatrics gymesur real $n \times n$, yna bodola matrics orthogonal P fel bod***

$$P^t A P = \textbf{\textit{diag}}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

lle mae $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yw gwerthoedd-eigen A (sydd nid o reidrwydd yn wahanol i'w gilydd)

PRAWF Mae'r prawf yn un anwythol ar n. Os yw $n = 1$, mae'r canlyniad yn amlwg. Os yw $n > 1$, tybier bod pob matrics $(n-1) \times (n-1)$ gymesur real yn gyflun orthogonal i fatrics croeslin.

Gadawer i λ fod yn werth-eigen o A gyda'r fector-eigen cyfatebol X, yna mae $AX = \lambda X$. Gadawer i $X_1 = X/|X|$, yna trwy ddefyddio weithdrefn orthogonaleiddo Gram-Schmidt (Theorem 5.8) gellir llunio sylfaen-$\mathbb{R}$ orthonormal $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i $V_n(\mathbb{R})$. Rhodder $U = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, yna mae U yn fatrics orthogonal $n \times n$ ac mae

$$\begin{aligned} U^tAU &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda(X_1, X_1) & Z_1 \\ \hline \lambda(X_1, X_2) & \\ \vdots & B \\ \lambda(X_1, X_n) & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & Z_1 \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \end{aligned}$$

lle mae B yn fatrics $(n-1) \times (n-1)$. Gan fod A yn fatrics cymesur ac mae

$$(U^tAU)^t = U^tAU$$

mae'n dilyn fod U^tAU yn fatrics gymesur ac hefyd fod B yn fatrics gymesur a bod

$$U^tAU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

Yn awr, trwy gymeryd y dybiaeth anwythol, bodola matrics orthogonal $(n-1) \times (n-1)$ V fel bod

$$V^tBV = \textbf{diag}\,(\lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

lle mae $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ yw gwerthoedd-eigen B (ac hefyd felly yn werthoedd-eigen A). Gadawer i

$$V' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right)$$

yna mae V' yn fatrics orthogonal $n \times n$ ac mae

$$\begin{aligned} V'U^tAUV' &= V'^t \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) V' \\ &= \textbf{diag}\,(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \end{aligned}$$

ac mae UV' yn fatrics orthogonal sy'n cwblhau y prawf.

ENGHREIFFTIAU

1. Os yw $A = \begin{pmatrix} 10 & -14 & -10 \\ -14 & 7 & -4 \\ -10 & -4 & 19 \end{pmatrix}$, yna polynomial nodweddiadol A yw

$$\chi_A(x) = \begin{pmatrix} 10-x & -14 & -10 \\ -14 & 7-x & -4 \\ -10 & -4 & 19-x \end{pmatrix}$$

sydd o'i enrifo yn rhoi

$$\chi_A(x) = (x-18)(x-27)(x+9)$$

ac felly, y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = 18, 27$ **a** -9**.**

Os yw $\lambda = 18,$ **yna mae** $\begin{pmatrix} -8 & -14 & -10 \\ -14 & -11 & -4 \\ -10 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

os yw $\lambda = -9,$ **yna mae** $\begin{pmatrix} 19 & -14 & -10 \\ -14 & 16 & -4 \\ -10 & -4 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

ac os yw $\lambda = 27,$ **yna mae** $\begin{pmatrix} -17 & -14 & -10 \\ -14 & -20 & -4 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Os yn awr, rhoddir

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

yna mae P **yn fatrics orthogonal ac mae**

$$P^t AP = \textbf{diag}\,(18, -9, 27).$$

2. Os yw $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$**, yna polynomial nodweddiadol** A **yw**

$$\chi_A(x) = \begin{pmatrix} 7-x & -1 & -2 \\ -1 & 7-x & 2 \\ -2 & 2 & 10-x \end{pmatrix}$$

sydd o'i enrifo yn rhoi

$$\chi_A(x) = (x-6)^2(x-12)$$

ac felly, y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = 6$ **a** $\lambda = 12$**.**

Os yw $\lambda = 12,$ **yna mae** $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$

ac os yw $\lambda = -9,$ **yna mae** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$

Nid yw'r ddau fector $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, -1)$ yn orthogonal yw gilydd, ond trwy ddefnyddio weithdrefn orthogonaleiddio Gram-Schmidt ceir

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 1, 0) \\ y_2 &= (0, 2, -1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, -1). \end{aligned}$$

Yna mae $(1, 1, 0)$ a $(-1, 1, -1)$ yn orthogonal yw gilydd ac maent yn fectorau-eigen sy'n cyfateb i'r gwerth-eigen $\lambda = 6$. Yn awr, trwy normaleiddio y fectorau hyn a rhoi

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

yna mae P yn fatrics orthogonal ac mae

$$P^t A P = \textbf{diag}\,(12, 6, 6).$$

Ymarferion 6.5

1. **Darganfyddwch matrics orthogonal U fel bod $U^t A U$ yn fatrics croeslin pan mae A yw y matricsau canlynol**

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\begin{pmatrix} 11 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 18 & -1 & -4 \\ -1 & 18 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

6.6 Ffurfiau Cwadratig

Trwy'r adran hon, cymerir bod V yn ofod-$\mathbb{R}$ o ddimensiwn meidraidd.

Diffiniad 6.29 ***Os yw $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yn sylfaen-$\mathbb{R}$ i V, yna* ffurf cwadratig real *dros V yw ffwythiant $Q : V \to \mathbb{R}$ a ddiffinnir gan***

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

lle mae $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \; (x_i \in \mathbb{R})$ ac A yn fatrics gymesur real.

ENGHRAIFFT

Os yw, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, yna rhoddir $Q : V \to \mathbb{R}$ gan

$$\begin{aligned} Q(v) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 x_2. \end{aligned}$$

Fel y gwelwyd yn yr enghraifft, yn arferol ysgrifennir y mynegiant $Q(v)$ fel

$$Q(v) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

gyda'r cyfernod a_{ij} yn y mynegiant yn cael ei rannu rhwng y safleodd-(i,j) a -(j,i) yn y matrics A.

Os $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yw fector cyfernod v, yna gellir mynegi $Q(v)$ mewn ffurf matrics fel

$$Q(v) = XAX^t.$$

Yn awr, ystyrir yr effaith o newid y sylfaen-$\mathbb{R}$ ar Q. Gadawer i $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ fod yn sylfaen-$\mathbb{R}$ arall i V, felly (gweler §4.3) mae $v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, lle mae $P = (p_{ij})$ yn fatrics gwrthdro. Os yw $v = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j'$, yna mae

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j \right) v_i \end{aligned}$$

ac felly, mae

$$X^t = PY^t \text{ lle mae } Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Felly mae

$$Q(v) = XAX^T = YP^tAPY^t = Y(P^tAP)Y^t$$

lle mae P^tAP hefyd yn fatrics cymesur gan bod $(P^tAP)^t = P^tAP$.

Os yw $D =$ diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, yna mae $Q : V \to \mathbb{R}$ a ddiffinnir gan

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

yn ffurf cwadratig real ar V sydd gan ffurf syml a elwir yn ffurf cwadratig croeslin. Ystyrir yn awr y posibilrwydd o ddarganfod sylfaen-$\mathbb{R}$ i V fel y gellir cynrchioli unrhyw ffurf cwadratig real fel ffurf cwadratig croeslin. Ond gan gadw mewn cof y bwriad i gymhwyso y cyfan i gyfeiriad geometreg, mynnir bod y matrics P yn orthogonal. Ond gwelir yn awr ein bod yn union sefyllfa a gafodd ei drin yn yr adran blaenorol ac mae'r canlyniad dilynol yn dod ar ei union o Theorem 6.28.

Theorem 6.30 ***Gellir gostwng unrhyw ffurf real cwadratig i ffurf cwadratig croeslin trwy drawsffurfiant orthogonal.***

Fel awgrymwyd uchod, mae gan y canlyniad hwn cymhwysiad defnyddiol a choeth i geometreg, sef i geometreg dadansoddol.

Mae gan pob hafaliad cyffredinol o doriad conig y ffurf

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + ux + vy + p = 0. \tag{6.6.1}$$

Gelwir y rhan gyntaf

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

o hwn y ffurf cwadratig cysylltiol. Gellid mynegi rhain ar ffurf matrics fel

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (u, v)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + p = 0.$$

Felly, os yw $X = (x, y)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $T = (u, v)$, **ceir bod**

$$XAX^t + TX^t + p = 0.$$

Mae'r matrics A **yn gymesur, ac felly trwy'r theorem uchod, bodola matrics orthogonal** P **fel bod**

$$P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

lle mae λ_1, λ_2 **yw gwerthoedd-eigen** A. **Felly, trwy weithredu y trawsffurfiad**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \textbf{ (neu } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

cymer (6.6.1) y ffurf

$$X'P^tAPX'^t + TPX'^t + p = 0$$

neu

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + u'x' + v'y' + p' \quad = \quad 0, \tag{6.6.2}$$

lle mae $p' = p$ **a** $(u', v') = TP$.

Felly, trwy gyflwyno echelau newydd, a elwir yn brif echelau $0x'$ **a** $0y'$ **yn y plân-**xy **i'r cyfeiriadau** X_1 **a** X_2, **lle mae** $P = (X_1, X_2)$, **mae gan y toriad conig graff a gynrychiolir gan (6.6.2). Gellir gostwng (6.6.2) ymhellach mewn modd sy'n ddibynnol ar werthoedd** λ_1 **a** λ_2. **Ystyrir sawl achos.**

Achos 1 **Os yw** $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, **rhodder**

$$x'' = x' + \frac{u'}{2\lambda_1},\ y'' = y' + \frac{v'}{2\lambda_2}$$

yn (6.6.2), yna ceir

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = p''.$$

Os yw $\lambda_1 = \lambda_2$, **yna mae hwn yn hafaliad cylch gyda'r canol** $\left(-\frac{u'}{2\lambda_1}, -\frac{v'}{2\lambda_1}\right)$ **yn y plân-**$x'y'$ **a'r radiws** $\sqrt{p''/\lambda_1}$.

Os yw $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, **yna mae hwn yn hafaliad elips gyda'r canol** $\left(-\frac{u'}{2\lambda_1}, -\frac{v'}{2\lambda_2}\right)$ **yn y plân-**$x'y'$ **ac sy'n cyfarfod â'r echel-**$0x''$ **newydd yn**

y pwyntiau $(\pm\sqrt{p''/\lambda_1}, 0)$ **ac sy'n cyfarfod â'r echel-**$0y''$ **newydd yn y pwyntiau** $(0, \pm\sqrt{p''/\lambda_2})$**.**

Os yw $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$**, yna mae hwn yn hafaliad hyperbola gyda'r canol** $\left(-\frac{u'}{2\lambda_1}, -\frac{v'}{2\lambda_2}\right)$ **yn y plân-**$x'y'$ **a'r fertigau yw** $(\pm\sqrt{p''/\lambda_1}, 0)$ **a'r ddwy linell** $y''/\sqrt{p''/\lambda_2} = \pm x''/\sqrt{p''/\lambda_1}$ **(neu** $\sqrt{\lambda_2}y'' = \pm\sqrt{\lambda_1}x''$**) yw'r ddau asymptot.**

Achos 2 **Os yw** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$**, rhodder**

$$y'' = y' + \frac{v'}{2\lambda_2}$$

yn (6.6.2), yna ceir

$$\lambda_2 y''^2 + u'x' + p'' = 0.$$

Os yw $u' \neq 0$**, os ymhellach rhoddir** $x'' = x' + p''/u'$**, ceir**

$$\lambda_2 y''^2 + u'x'' = 0$$

sy'n hafaliad o parabola gyda'r fertig $\left(-\frac{p''}{u'}, -\frac{v'}{2\lambda_2}\right)$ **yn y plân-**$x'y'$ **a focws** $(-u'/4\lambda_2, 0)$**.**

Gellir trin yr achos $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ **yn yr un modd. Mae achosion "dirywiedig" eraill, ond ni ystyrir y rhain ymhellach.**

Rhoddir y ffurfiau safonol o'r conigau hyn yn Appendics 1.

Darlunir hyn yn yr engreifftiau sy'n dilyn. Mae'r engreifftiau cyntaf yn gonigau canolog.

ENGHREIFFTIAU.

1. **Dangosir sut i lunio graff o'r toriad conig**

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

Y ffurf matrics yw

$$(x, y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8.$$

Mae'r gwerthoedd-eigen yn wreiddiau o

$$\begin{vmatrix} 5-x & -3 \\ -3 & 5-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8-x \end{vmatrix} = (2-x)(8-x),$$

hynny yw, y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = 2$ **ac** 8 **a'r fectorau-eigen yw** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **a** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$**. Ar ôl eu normaleiddio, ceir**

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

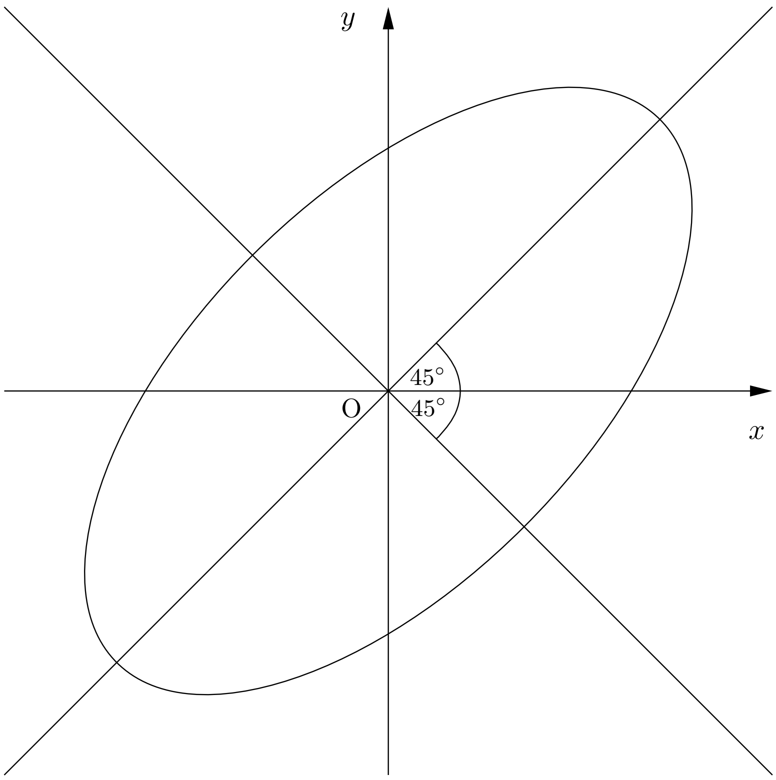


Figure 6.1: Ffigwr 2

ac yna mae

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, trwy gymeryd echelau newydd $0x'$ a $0y'$ i'r cyfeiriadau $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ac $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yn ôl eu trefn, (neu trwy roi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$), yna hafaliad y conig yw

$$2x'^2 + 8y'^2 = 8$$

neu

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1.$$

Felly, hafaliad elips yw hwn gyda'r graff a ddarlunir yn Ffigwr 2.

2. Dangosir yn awr sut i lunio graff o'r toriad conig

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10.$$

Y ffurf matrics yw

$$(x, y) \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10.$$

Y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = -5$ ac 10 a'r fectorau-eigen yw $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, yn ôl eu trefn. Ar ôl eu normaleiddio, ceir

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ac yna mae

$$P^t AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Yn awr, trwy gymeryd echelau newydd $0x'$ a $0y'$ i'r cyfeiriadau $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ac $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ yn ôl eu trefn, (neu trwy roi $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$), yna hafaliad y conig yw

$$-5x'^2 + 10y'^2 = 10$$

neu

$$-\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1.$$

Felly, hafaliad hyperbola yw hwn gyda'r graff a ddarlunir yn Ffigwr 3.

3. Dangosir yn awr sut i lunio graff o'r toriad conig

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0.$$

Y ffurf matrics yw

$$(x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4\sqrt{2}, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0.$$

Y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = 0$ ac 2 a'r fectorau-eigen yw $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ar ôl eu normaleiddio, ceir

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ac yna trwy gymeryd echelau newydd $0x'$ a $0y'$ i'r cyfeiriadau $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ac $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yn ôl eu trefn, yna hafaliad y conig yw

$$2y'^2 + (-4\sqrt{2}, 0)\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 6 = 0$$

neu

$$y'^2 - 2y' - 2x' + 3 = 0,$$

sy'n arwain i

$$(y' - 1)^2 = 2(x' - 1).$$

Felly, hafaliad parabola yw hwn gyda'r fertig $(1,1)$ **yn y plân-**(x', y') **(ac sydd gan y cyfesurynnau**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

hynny yw, y pwynt $(\sqrt{2}, 0)$ **yn y plân-**(x, y)**. Felly y parabola a ddarlunir gan y**

graff yn Ffigwr 4.

Gellir defnyddio yr un method i drafod arwynebau cwadrig yn nghofod-3**. Mae hafaliad cyffredinol arwynebedd cwadrig gan y ffurf**

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + ux + vy + wz + p = 0$$

y gellir unwaith eto ei gynrychioli ar y ffurf matrics

$$XAX^t + TX^t + p = 0$$

lle yn awr mae

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \ X = (x, y, z), \ T = (u, v, w).$$

Gellir gostwng hwn yn union yr un modd a'r toriad conig - ond ni roddir y manylion yn yr achos yma. Yn Appendics 2, rhoddir graffiau yr arwynebau anddirwyiedig. Darlunir y method o drin yr achosion yma yn yr enghreifftiau sy'n dilyn.

ENGHREIFFTIAU

1. **Ystyrir y broblem o enwi yr arwynebedd cwadrig gyda'r hafaliad**

$$7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz = 24.$$

Y matrics cyfatebol yw

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dyma'r union fatrics a drafodwyd yn Enghraifft 2 uchod, ac felly, mae'r manylion angenrheidiol ar gael yn barod.

Y gwerthoedd-eigen yw $\lambda = 6$ **a** 12**. Yn cyfateb i'r gwerth-eigen** 12 **y fector-eigen yw** $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ **ac yn cyfateb i'r gwerth-eigen** 6 **mae'r fectorau-eigen orthogonal** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ **a** $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$**. Trwy gymeryd echelau newydd** $0x', 0y'$ **a** $0z'$ **i gyfeiriad y tri fector unedol yma yn ôl eu trefn (neu, beth sy'n gywerth, trwy'r amnewidiadau**

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-x' + \sqrt{3}y' + \sqrt{2}z') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{3}y' - \sqrt{2}z') \\ z &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x' + \qquad + \sqrt{2}z')) \end{aligned}$$

cymer yr arwynebedd cwadrig y ffurf

$$12x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 = 24$$

neu

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{4} = 1,$$

sydd o'i gymharu â'r graffiau yn Appendics 2 sy'n hafaliad elipsoid.

2. **Ystyrir yn yr un modd y broblem o adnabod yr arwynebedd cwadrig gyda'r hafaliad**

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 + 12xy - 4xz - 8yz + 8x + 12y + 22z + 44 = 0.$$

Y ffurf matrics cyfatebol yw

$$\begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 12 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 44 = 0.$$

Gwerthoedd-eigen y matrics hwn yw $\lambda = -3, -6$ **a** 9 **a'r gwerthoed-eigen cyfatebol yw** $(2,-1,2)$**,** $(-1,2,2)$ **a** $(2,2,-1)$**. Os rhoddir**

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a thrwy gymeryd echelau newydd $0x', 0y'$ **a** $0z'$ **i gyfeiriad y tri fector unedol** $\frac{1}{3}(2,-1,2)$**,** $\frac{1}{3}(-1,2,2)$ **a** $\frac{1}{3}(2,2,-1)$ **yn ôl eu trefn (neu, beth sy'n gywerth, trwy'r amnewidiadau**

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(2x' - y' + 2z') \\ y &= \frac{1}{3}(-x' + 2y' + 2z') \\ z &= \frac{1}{3}(2x' + 2y' - z')) \end{aligned}$$

cymer yr arwynebedd cwadrig y ffurf

$$3x'^2 + 6y'^2 - 9z'^2 - 16x' - 20y' - 6z' - 44 = 0.$$

(gan bod

$$\frac{1}{3}(8, 12, 22)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (16, 20, 6).)$$

Yn awr, trwy roi

$$x'' = x' - 8/3,\ y'' = y' - 5/3,\ z'' = z' + 1/3,$$

yna cymer hafaliad yr arwynebedd cwadrig y ffurf

$$x''^2 + 2y''^2 - 3z''^2 = 27$$

neu

$$\frac{x''^2}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z''^2}{3^2} = 1.$$

O'i gymharu â'r graffiau yn Appendics 2 mae hwn yn hafaliad hyperboloid o un ddalen gyda'r canol

$$\frac{1}{9}(8, 5, -1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1, 0, 3)$$

gyda echelau i gyfeiriad y fectorau unedol a roddwyd uchod.

Ymarferion 6.6

1. Gostyngwch y ffurfiau cwadratig real canlynol i ffurf croeslin

(i) $x^2 + y^2 + xy$

(ii) $x^2 + y^2 - xy$

(iii) $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 2xy$

(iv) $2xy + 2xz + 2yz$

(v) $5x^2 + 11y^2 - 2z^2 + 12xz + 12yz$.

2. Darganfyddwch brif echelau, canol ac amlinellwch graff y conigau canlynol

(i) $xy = 2$

(ii) $3x^2 - 2y^2 + 12xy = 42$

(iii) $7x^2 + 4y^2 - 4xy = 24$

(iv) $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$

(v) $5x^2 + 5y^2 + 26xy - 70x - 38y = 7$

(vi) $73x^2 + 52y^2 + 72xy - 190x - 80y = -25$

3. Darganfyddwch brif echelau, canol ac enwch yr arwynebeddau cwadrig canlynol

(i) $2xy + 2xz + 2yz = 4$

(ii) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 1$

(iii) $4x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4xy + 4xz - 6yz = 16$

(iv) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 2yz = 7$

(v) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 3$

(vi) $11x^2 + 18y^2 + 4z^2 - 12xy + 12xz = 22$

(vii) $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 4xy - 20xz + 16yz + 5x + 5y - 2z = 0$

(viii) $7x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 10xy + 10xz - 8yz + 2x + 2z = 0$

Bibliography

Contents

List of Tables